

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич
Должность: врио ректора
Дата подписания: 30.08.2023 11:29:35
Уникальный программный ключ:
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



Утверждаю:

Руководитель ООП:

Шаров Шаров Г.С.

«16» 05 2023 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Направление подготовки
02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование
информационных систем

Профиль подготовки
Математические основы информатики

Для студентов 2 курса

Форма обучения
Очная

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Составитель:

Шаров

д.ф.м.н., профессор
Г.С. Шаров

Тверь, 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Утверждаю:

Руководитель ООП:

_____ Шаров Г.С.

« ____ » _____ 2023 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Направление подготовки
02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование
информационных систем

Профиль подготовки
Математические основы информатики

Для студентов 2 курса

Форма обучения
Очная

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Составитель:

д.ф.м.н., профессор
Г.С. Шаров

Тверь, 2023

I. Аннотация

1. Цели и задачи дисциплины

– дать фундаментальную подготовку по геометрии и топологии; помочь студенту овладеть современными математическими методами, полезными для решения прикладных задач.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к обязательной части блока дисциплин, формирует универсальную и общепрофессиональную компетенции. Для ее успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения в школе и в ходе освоения дисциплин «Аналитическая геометрия», «Алгебра и теория чисел» и «Математический анализ». От успешности освоения дисциплины в значительной степени зависит эффективность дальнейшего обучения студента, в том числе и при последующем изучении дисциплин «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование», «Математический анализ», «Компьютерная графика» и других курсов.

3. Объём дисциплины:

5 зачетных единиц, 180 академических часов, в том числе

контактная работа: лекции – 34 часа, практические занятия – 34 часов, самостоятельная работа и контроль – 112 часов.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя её базовые составляющие УК-1.2 Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Оперировать базовыми знаниями в области основных математических и естественно-научных дисциплин, предусмотренных учебным планом ОПК-1.2 Решает типовые задачи основных математических и естественно-научных дисциплин, применяя стандартные приемы и методы ОПК-1.3 Выбирает различные методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний, полученных при изучении основных математических и естественно-научных дисциплин

5. Форма промежуточного контроля.

По окончании 3-го семестра – экзамен.

6. Язык преподавания русский.

II. Содержание дисциплины (или модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

1. Для студентов очной формы обучения

Наименование разделов и тем		Всего часов	Аудиторные занятия		Самост. работа
Разделы	Темы		Лекции	практика	
Дифференциальная геометрия кривых на плоскости и в пространстве.	1. Простая кривая (график дифференцируемой функции) на плоскости. Параметризованная кривая. Регулярные и нерегулярные точки. Радиус-вектор кривой. Теорема о строении плоской параметризованной кривой в окрестности регулярной точки.	15	3	4	8
	2. Касательная и нормаль к плоской кривой, их уравнения. Геометрический и физический смысл производной радиуса-вектора параметризованной кривой.	10	2	2	6
	3. Пространственные кривые. Параметризованные кривые в пространстве. Кривая Ви-виани, винтовая линия. Строение пространственной параметризованной кривой в окрестности регулярной точки.	13	3	3	7
	4. Соприкасающаяся плоскость пространственной кривой, ее инвариантность относительно замены параметра. Теорема о порядке касания кривой и ее соприкасающейся плоскости.	11	3	2	6
	5. Длина дуги кривой. Натуральный параметр. Свойства первой и второй производной радиуса-вектора по натуральному параметру, их физический смысл. Вектор главной нормали. Геометрические образы, связанные с точкой пространственной кривой, их уравнения.	12	3	3	6
	6. Кривизна кривой. Кривизна как модуль второй производной от радиуса-вектора по натуральному параметру. Точки спрямления. Кривые с нулевой кривизной. Кривизна окружности.	10	2	3	5

Наименование разделов и тем		Всего часов	Аудиторные занятия		Самост. работа
Разделы	Темы		Лекции	практика	
	7. Формулы Френе для пространственной и плоской кривой. Кручение, его геометрический смысл.. Точки уплощения. Кривые с нулевым кручением. Формулы для вычисления кривизны и кручения.	10	3	2	5
	8. Порядок касания кривых. Теорема о порядке касания плоских кривых, одна из которых задана неявно, а другая – параметрически. Соприкасающаяся окружность плоской кривой. Эволюта, эвольвента, их свойства.	11	3	3	5
	9. Огибающая семейства кривых на плоскости. Натуральные уравнения пространственной кривой. Теорема об определении кривой ее натуральными уравнениями. Нахождение параметрических уравнений плоской кривой по ее натуральному уравнению.	12	3	3	6
Дифференциальная геометрия поверхностей.	10. Простая поверхность (график дифференцируемой функции $z=f(x,y)$). Гладкое отображение двумерной области в трехмерное пространство. Регулярные точки. Строение образа в окрестности регулярной точки. Определение параметризованной поверхности. Координатная сеть на поверхности. Параметрические уравнения плоскости, сферы, геликоида, цилиндра и конуса.	14	3	4	7
	11. Теорема о строении множества, заданного уравнением $F(x,y,z)=0$, в окрестности неособой точки. Параметрические уравнения поверхностей второго порядка..	9	2	2	5
	12. Линия на поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, их уравнения. Вид координатной сети в окрестности нерегулярной точки.	10	2	3	5
1-я квадратичная форма поверхности	13. Длина кривой на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Линейный элемент плоскости в декартовых и полярных координатах, сферы в географических координатах, цилиндрической и конической поверхностей.	13	3	3	7
	14. Вычисление угла между кривыми на поверхности. Угол между координатными линиями. Площадь области на поверхности.	12	3	3	6

Наименование разделов и тем		Всего часов	Аудиторные занятия		Самост. работа
Разделы	Темы		Лекции	практика	
	15. Поверхности вращения, их параметрические уравнения. Тор, катеноид, псевдосфера. Линейный элемент поверхности вращения. Линейчатые и развертывающиеся поверхности.	12	3	3	6
	16. Изометрическое отображение поверхностей. Необходимое и достаточное условие изометрии. Изометрическое отображение геликоида на катеноид. Деформация, изгибание, наложимость поверхностей. Наложение развертывающейся поверхности на плоскость.	12	3	3	6
	17. Конформное отображение поверхностей. Необходимое и достаточное условие конформности соответствия.	10	3	2	5
Основы топологии	18. Метрическое пространство. Открытый шар, открытое множество, открытость объединения и пересечения (конечного числа) открытых множеств.	10	3	2	5
	19. Определение топологического пространства. Метрическая и евклидова топологии, дискретная и антидискретная топологии, подпространство топологического пространства. Окрестность точки метрического и топологического пространства. Внутренняя точка, внутренность, свойства открытых множеств и свойства внутренности.	11	3	2	6
Итого		180	34	34	112

III. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Примерные индивидуальные задания.

2. Список вопросов к экзамену.

1. Параметризованные кривые

Научиться строить кривую, исследовать ее свойства, находить ее асимптоты, точки перегиба, точки самопересечения, нерегулярные точки, локальные экстремумы, переходить к общим уравнениям и исследовать особые точки.

1) Постройте параметризованную кривую $x=x(t)$, $y=y(t)$. Найдите ее асимптоты, точки перегиба, точки самопересечения, нерегулярные точки, локальные экстремумы функций $x(t)$, $y(t)$.

2) Исключите переменную t из заданных параметрических уравнений, найдите уравнение соответствующей общей кривой $F(x,y)=0$ и определите ее порядок. Найдите особые точки этой кривой.

$$\begin{array}{lll} (1) \begin{cases} x = t - \frac{1}{t}, \\ y = t^2 - \frac{1}{t}. \end{cases} & (2) \begin{cases} x = \frac{t^2 + t^3}{1 + t^2}, \\ y = \frac{t^2 - t^3}{1 + t^2}. \end{cases} & (3) \begin{cases} x = t^3 - \frac{t^5}{5}, \\ y = \frac{3}{1 + t^2}. \end{cases} \\ (4) \begin{cases} x = t(4 - t^2), \\ y = t^2(4 - t^2). \end{cases} & (5) \begin{cases} x = \frac{t^2}{1 - t^3}, \\ y = \frac{t^3}{1 - t^3}. \end{cases} & (6) \begin{cases} x = \frac{t^2}{t - 1}, \\ y = \frac{t^3}{t - 1}. \end{cases} \\ (7) \begin{cases} x = \frac{1}{1 + t^2}, \\ y = \frac{t + t^2}{1 + t^2}. \end{cases} & (8) \begin{cases} x = \frac{t^3}{1 + t^2}, \\ y = \frac{t^2 - t^3}{1 + t^2}. \end{cases} & (9) \begin{cases} x = \frac{5t^2}{1 + t^5}, \\ y = \frac{5t^3}{1 + t^5}. \end{cases} \\ (10) \begin{cases} x = t^2 + t, \\ y = t - 1/t. \end{cases} & (11) \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 - t^5. \end{cases} & (12) \begin{cases} x = t^4, \\ y = t^2 - t^5. \end{cases} \end{array}$$

2. Вопросы для экзамена

1. Простая кривая (график дифференцируемой функции) на плоскости. Параметризованная кривая. Регулярные и нерегулярные точки. Параметризации прямой, окружности, эллипса, гиперболы, циклоиды. Радиус-вектор кривой. Теорема о строении плоской параметризованной кривой в окрестности регулярной точки.

2. Теорема о строении множества, заданного уравнением $F(x,y)=0$, в окрестности неособой точки; виды особых точек. Декартов лист.

3. Касательная и нормаль к плоской кривой, их уравнения. Геометрический и физический смысл производной радиуса-вектора параметризованной кривой.

4. Пространственные кривые. Параметризованные кривые в пространстве. Кривая Вивиани, винтовая линия. Строение пространственной параметризованной кривой в окрестности регулярной точки.

5. Соприкасающаяся плоскость пространственной кривой, ее инвариантность относительно замены параметра. Теорема о порядке касания кривой и ее соприкасающейся плоскости.

6 Длина дуги кривой. Натуральный параметр. Свойства первой и второй производной радиус-вектора по натуральному параметру, их физический смысл. Вектор главной нормали. Геометрические образы, связанные с точкой пространственной кривой, их уравнения.

7. Кривизна кривой. Кривизна как модуль второй производной от радиуса-вектора по натуральному параметру. Точки спрямления. Кривые с нулевой кривизной. Кривизна окружности.

8. Формулы Френе для пространственной и плоской кривой. Кручение, его геометрический смысл. Точки уплощения. Кривые с нулевым кручением. Формулы для вычисления кривизны и кручения.

9. Порядок касания кривых. Теорема о порядке касания плоских кривых, одна из которых задана неявно, а другая – параметрически. Соприкасающаяся окружность плоской кривой. Эволюта, эвольвента, их свойства.

10. Огибающая семейства кривых на плоскости. Натуральные уравнения пространственной кривой. Теорема об определении кривой ее натуральными уравнениями. Нахождение параметрических уравнений плоской кривой по ее натуральному уравнению.

11. Простая поверхность (график дифференцируемой функции $z=f(x,y)$). Определение параметризованной поверхности. Координатная сеть на поверхности. Параметрические уравнения плоскости, сферы, геликоида, цилиндра и конуса.

12 Теорема о строении множества, заданного уравнением $F(x,y,z)=0$, в окрестности неособой точки. Параметрические уравнения поверхностей второго порядка.

13. Линия на поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, их уравнения. Вид координатной сети в окрестности нерегулярной точки.

14. Длина кривой на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Линейный элемент плоскости в декартовых и полярных координатах, сферы в географических координатах, цилиндрической и конической поверхностей.

15. Вычисление угла между кривыми на поверхности. Угол между координатными линиями. Площадь области на поверхности.

16. Поверхности вращения, их параметрические уравнения. Тор, катеноид, псевдосфера. Линейный элемент поверхности вращения. Линейчатые и развертывающиеся поверхности.

17. Метрическое пространство. Открытый шар, открытое множество, открытость объединения и пересечения (конечного числа) открытых множеств.

18. Определение топологического пространства. Метрическая и евклидова топологии, дискретная и антидискретная топологии, Аксиомы отделимости. Примеры топологических пространств, Окрестность точки метрического и топологического пространства. Внутренняя точка, внутренность, свойства открытых множеств и свойства внутренности.

IV. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

1. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенции

Планируемый образовательный результат (компетенция, индикатор)	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)	Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез ин-	Проведите исследование заданной поверхности, найдите	Уверенное владение, задание полностью выпол-

формации, применять системный подход для решения поставленных задач	параметрические и общее уравнения, первую и вторую квадратичные формы, длину кривой на поверхности, найдите асимптотические линии, полную и среднюю кривизну, нормальную кривизну координатных линий.	нено – 8 баллов. Наличие отдельных ошибок – 3 – 7 баллов. Большое количество ошибок – 0 баллов.
УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя её базовые составляющие УК-1.2 Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи	Постройте заданную параметризованную кривую. Найдите ее асимптоты, точки перегиба, точки самопересечения, нерегулярные точки, локальные экстремумы; найдите уравнение соответствующей общей кривой, определите ее порядок.	Правильное выполнение задания – 10 баллов. Наличие отдельных ошибок – 4 – 7 баллов. Большое количество ошибок, решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов.

Планируемый образовательный результат (компетенция, индикатор)	Типовые контрольные задания	Критерии оценивания и шкала оценивания
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<p>1. Проверьте регулярность параметризации и найдите особые точки кривой $x=2(\text{sh}t-\text{ch}t)$, $y=\text{ch}t-\text{sh}t$, $z=e^{-3t/2}$.</p> <p>2. Найдите длину дуги кривой $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, лежащей внутри шара $x^2+y^2+z^2=2$. Найдите натуральный параметр s на этой кривой.</p> <p>3. Найдите уравнения элементов трехгранника Френе кривой $x=t^3-t^2-5$, $y=3t^2+1$, $z=2t^3-16$ в той точке M, где нормальная плоскость параллельна плоскости $2x+3y+6z=0$.</p> <p>4. Найдите, при каких a и b кривизна кривой $x=a \text{ch}t$, $y=a \text{sh}t$, $z=bt$ во всех точках совпадает с кручением.</p> <p>5. Пусть R - радиус кривизны плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $R = \alpha$.</p> <p>6. Найдите уравнение эволюты цепной линии $y = a \text{ch} x/a$.</p> <p>7. Найдите кривизну эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ в тех точках, где отрезок касательных между осями координат делится точкой касания пополам.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены необходимые примеры; студент показывает понимание излагаемого материала – 31 – 40 баллов • Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены примеры, однако имеются неточности; в целом студент показывает понимание изученного материала – 21 – 30 балла • Ответ дан в основном правильно, но недостаточно аргументированы выводы, приведены

	<p>8. На главных нормалях винтовой линии γ отложены отрезки длины $1/k$, где k – кривизна кривой γ. Найдите уравнение кривой, образованной концами этих отрезков, определите ее кривизну и кручение.</p>	<p><i>не все необходимые примеры</i> – 11 – 20 баллов</p> <p>• <i>Даны неверные ответы на поставленные вопросы</i> – 0 – 10 баллов</p>
--	--	--

V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. Мищенко А. С, Фоменко А. Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 304 с. — ISBN 5-9221-0442-X.
2. Игнаточкина Л. А. Топология для бакалавров математики [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л. А. Игнаточкина. - М. : Прометей, 2016. - 88 с. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437314>

б) дополнительная литература:

1. Мищенко А.С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. Учебное пособие. М.: Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2004. - 304 с. – Электронный ресурс. – режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=544615>
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69322>
2. Примаков Д.А. Геометрия и топология [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Д. А. Примаков, Р. Я. Хамидуллин. — М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2011.— 272 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/17013.html>

VI. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.libraru.tversu.ru> – научная библиотека ТвГУ;
<http://www.biblioclub.ru/> - университетская библиотека ONLINE;
<http://lib.mexmat.ru/> – научная библиотека МГУ.

VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Для успешного усвоения материала данной учебной дисциплины, в частности, для выработки навыков решения задач необходима систематическая самостоя-

тельная работа студентов по подготовке к практическим занятиям, коллоквиумам и к контрольным работам.

Подготовка к практическим занятиям включает в себя:

- 1) решение практических задач, заданных преподавателем на дом;
- 2) повторение теоретических вопросов, определений, теорем, необходимых для решения практических задач;
- 3) повторение соответствующего раздела при подготовке к контрольной работе.

VIII. Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (или модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (по необходимости)

1. Традиционные лекция и практическое занятие,
2. Использование средств мультимедиа.

IX. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Учебные аудитории, оснащенные средствами мультимедиа.

X. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№ п. п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины (модуля)	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения
1	Разделы III, IV, V.	Обновление содержания, ФОС, списка литературы	20.09.2017 г, протокол № 1
2			
3			