

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: временно исполняющий обязанности  
Дата подписания: 09.08.2023 10:49:18  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации ФГБОУ ВО  
«Тверской государственный университет»

Утверждаю:  
Руководитель ООП  
*П.П. Цветков*  
« » 2022 г.  
Тверской государственный университет  
Математический факультет

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

**Дополнительные главы дифференциальной геометрии**

Направление подготовки

**02.03.01 Математика и компьютерные науки**

**Профиль подготовки**

Математическое и компьютерное моделирование

Для студентов 3 курса

Форма обучения очная

Составитель: *Беспалько Е.В.*  
Ст. преподаватель Беспалько Е.В.

Тверь 2022

## I. Аннотация

### 1. Цель и задачи дисциплины

*Цель* – сформировать представление о комплексе идей и методов классической дифференциальной геометрии, развить математическую культуру студента и подготовить его к усвоению других основных математических курсов.

*Задачи:*

- 1) фундаментальная подготовка по дифференциальной геометрии и топологии;
- 2) овладение методами дифференциальной геометрии и топологии;
- 3) овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части блока 1 учебного плана – к дисциплинам, формирующим универсальные и общепрофессиональные компетенции.

Для ее успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения дисциплинам «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения». От успешности освоения дисциплины в значительной степени зависит эффективность дальнейшего обучения студента.

Дисциплина изучается на 3 курсе (5 семестр).

**3. Объем дисциплины:** 3 зачетные единицы, 108 академических часов, в том числе:

**контактная аудиторная работа:** лекции 34 часа, практические занятия 34 часа;

**самостоятельная работа:** 40 часов.

### 4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Осуществляет отбор теоретического и практического материала ОПК-1.2 Решает типовые задачи в рамках профессиональной деятельности ОПК-1.3 Использует различные методы и приемы решения задач профессиональной деятельности

**5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения** зачет (5 семестр).

**6. Язык преподавания:** русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа		Самостоятельная работа, в том числе контроль (час.)
		Лекции	Практические занятия	
<b>Часть 1</b>				
1. Простая кривая (график дифференцируемой функции) на плоскости. Параметризованная кривая. Регулярные и нерегулярные точки. Параметризация прямой, окружности, эллипса, гиперболы, циклоиды. Радиус-вектор кривой. Теорема о строении плоской параметризованной кривой в окрестности регулярной точки.	3	1	1	1
2. Теорема о строении множества, заданного уравнением $F(x,y)=0$ , в окрестности неособой точки; виды особых точек. Декартов лист.	2	1	1	0
3. Касательная и нормаль к плоской кривой, их уравнения. Геометрический и физический смысл производной радиус-вектора параметризованной кривой.	3	1	1	1
4. Пространственные кривые. Параметризованные кривые в пространстве. Кривая Вивиани, винтовая линия. Строение пространственной параметризованной кривой в окрестности регулярной точки.	3	1	1	1
5. Соприкасающаяся плоскость пространственной кривой, ее инвариантность относительно замены параметра. Теорема о порядке касания кривой и ее соприкасающейся плоскости.	3	1	1	1
6. Длина дуги кривой. Натуральный параметр. Свойства первой и второй производной радиус-вектора по натуральному параметру, их физический смысл. Вектор главной нормали. Геометрические образы, связанные с точкой пространственной кривой, их уравнения.	3	1	1	1
7. Кривизна кривой. Кривизна как модуль второй производной от радиус-вектора по натуральному параметру. Точки спрямления. Кривые с нулевой кривизной. Кривизна окружности.	3	1	1	1
8. Формулы Френе для пространственной и плоской кривой. Кручение, его	3	1	1	1

геометрический смысл.. Точки уплощения. Кривые с нулевым кручением. Формулы для вычисления кривизны и кручения.				
9. Порядок касания кривых. Теорема о порядке касания плоских кривых, одна из которых задана неявно, а другая --- параметрически. Соприкасающаяся окружность плоской кривой. Эволюта, эвольвента, их свойства.	3	1	1	1
10. Огибающая семейства кривых на плоскости. Натуральные уравнения пространственной кривой. Теорема об определении кривой ее натуральными уравнениями. Нахождение параметрических уравнений плоской кривой по ее натуральному уравнению.	3	1	1	1
11. Простая поверхность (график гладкой функции $z=f(x,y)$ ). Гладкое отображение двумерной области в трехмерное пространство. Регулярные точки. Строение образа в окрестности регулярной точки. Определение параметризованной поверхности. Координатная сеть на поверхности. Параметрические уравнения плоскости, сферы, геликоида, цилиндра и конуса.	3	1	1	1
12. Теорема о строении множества, заданного уравнением $F(x,y,z)=0$ , в окрестности неособой точки. Параметрические уравнения поверхностей второго порядка..	2	1	1	0
13. Линия на поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, их уравнения. Вид координатной сети в окрестности нерегулярной точки	2	1	1	0
14. Длина кривой на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Линейный элемент плоскости в декартовых и полярных координатах, сферы в географических координатах, цилиндрической и конической поверхностей.	3	1	1	1
15. Вычисление угла между кривыми на поверхности. Угол между координатными линиями.	2	1	1	0
16. Площадь области на поверхности.	3	1	1	1
17. Поверхности вращения, их параметрические уравнения. Тор, катеноид, псевдосфера. Линейный элемент поверхности вращения.	2	1	1	0
18. Линейчатые и развертывающиеся поверхности.	2	1	1	0

19. Изометрическое отображение поверхностей. Необходимое и достаточное условие изометрии. Изометрическое отображение геликоида на катеноид. Деформация, изгибание, наложимость поверхностей. Наложение развертывающейся поверхности на плоскость.	2	0	0	2
20. Конформное отображение поверхностей. Необходимое и достаточное условие конформности соответствия. Изотермические координаты. Конформное отображение поверхности вращения на плоскость. Стереографическая проекция. Инверсия, ее свойства.	3	0	0	3
21. Нормальная кривизна кривой, лежащей на поверхности. Вторая квадратичная (фундаментальная) форма поверхности.	2	1	1	0
22. Кривизна плоских сечений поверхности. Теорема Менье.	2	1	1	0
23. Индикатриса Дюпена, классификация точек на поверхности.	2	1	1	0
24. Главные кривизны и главные направления в точке поверхности. Гауссова и средняя кривизна поверхности. Формула Эйлера.	2	1	1	0
25. Сопряженные направления на поверхности. Линии кривизны, их дифференциальное уравнение. Линии кривизны на поверхности вращения.	2	1	1	0
26. Асимптотические направления и асимптотические линии на поверхности, их свойства. Минимальные поверхности.	2	1	1	0
27. Сферическое отображение. Теорема о полной кривизне. Интегральная кривизна поверхности.	2	1	1	0
28. Дериационные уравнения поверхности.	2	1	1	0
29. Формулы Гаусса-Петерсона-Кодадци. Теорема Гаусса Существование и единственность поверхности с заданными первой и второй квадратичными формами.	2	1	1	0
30. Геодезическая кривизна кривой на поверхности, инвариантность ее относительно изгибания. Формулы для вычисления геодезической кривизны.	2	1	1	0
31. Геодезические линии на поверхности, их свойства. Дифференциальные уравнения геодезических линий. Кинематическое свойство геодезических.	2	1	1	0
32. Полугеодезическая параметризация поверхности, вид первой квадратичной	2	0	0	2

формы при полугеодезической параметризации. Геодезическая как кратчайшая линия на поверхности.				
33. Поверхности постоянной гауссовой кривизны.	2	2	0	0
<b>Часть 2</b>	0	0	0	0
1. Метрическое пространство. Открытый шар, открытое множество, открытость объединения и пересечения (конечного числа) открытых множеств.	3	1	1	1
2. Определение топологического пространства. Метрическая и евклидова топологии, дискретная и антидискретная топологии, подпространство топологического пространства.	3	1	1	1
3. Аксиомы отделимости. Примеры топологических пространств, удовлетворяющих аксиоме $T_k$ , но не удовлетворяющих аксиоме $T_{k+1}$ . Хаусдорфовость метрических пространств.	2	0	0	2
4. Окрестность точки топологического пространства. Внутренняя точка, внутренность, свойства открытых множеств и свойства внутренности.	4	1	1	2
5. Точка прикосновения в топологическом пространстве. Замыкание, его свойства. Замкнутые множества, эквивалентность определений замкнутого множества.	3	0	1	2
6. Точка прикосновения, внутренняя, граничная, изолированная, предельная точка множества в топологическом пространстве. Граница множества.	3	0	1	2
7. Всюду плотные и нигде не плотные множества в топологическом пространстве. Критерии.	2	0	0	2
8. Непрерывность отображения метрических пространств. Непрерывность отображения топологических пространств. Критерий непрерывности отображения.	2	0	0	2
9. Гомеоморфизм топологических пространств и подмножеств топологического пространства. Примеры гомеоморфных множеств. Топологические инварианты.	2	0	0	2
10. Связность топологического пространства, подмножества топологического пространства. Критерий связности. Связность отрезка. Примеры несвязных множеств на числовой прямой. Образ связного множества при непрерывном отображении. Связность как	2	0	0	2

топологический инвариант. Компонента связности точки в топологическом пространстве. Линейная связность.				
11. Компактность множества в топологическом пространстве. Замкнутость компакта в хаусдорфовом пространстве. Образ компактного множества при непрерывном отображении. Компактность как топологический инвариант.	3	0	0	3
Итого	108	34	34	40

### **III. Образовательные технологии**

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании аудиторных занятий и различных форм самостоятельной работы студентов.

Также на занятиях практикуется самостоятельная работа студентов, выполнение заданий в малых группах, письменные работы, моделирование дискуссионных ситуаций, работа с раздаточным материалом, привлекаются ресурсы сети INTERNET. Курс предусматривает выполнение контрольных и самостоятельных работ, письменных домашних заданий. В качестве форм контроля используются различные варианты взаимопроверки и взаимоконтроля.

Интерактивное взаимодействие студентов с одной стороны и преподавателя с другой, а также студентов между собой и с преподавателем во время практических занятий.

#### ***Образовательные технологии***

1. Дискуссионные технологии
2. Информационные (цифровые)
3. Технологии развития критического мышления

#### ***Современные методы обучения***

1. Активное слушание
2. Лекция (традиционная)

### **IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации**

#### ***1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации***

##### **Темы контрольных работ с методическими указаниями по подготовке к ним**

1. Параметризованные кривые  
Научиться строить кривую, исследовать ее свойства, находить ее асимптоты, точки перегиба, точки самопересечения, нерегулярные точки, локальные экстремумы, переходить к общим уравнениям и исследовать особые точки.

1) Постройте параметризованную кривую  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ . Найдите ее асимптоты, точки перегиба, точки самопересечения, нерегулярные точки, локальные экстремумы функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

2) Исключите переменную  $t$  из заданных параметрических уравнений, найдите уравнение соответствующей общей кривой  $F(x,y)=0$  и определите ее порядок. Найдите особые точки этой кривой.

$$\begin{array}{lll}
 (1) \begin{cases} x = t - \frac{1}{t}, \\ y = t^2 - \frac{1}{t}. \end{cases} & (2) \begin{cases} x = \frac{t^2 + t^3}{1 + t^2}, \\ y = \frac{t^2 - t^3}{1 + t^2}. \end{cases} & (3) \begin{cases} x = t^3 - \frac{t^5}{5}, \\ y = \frac{3}{1 + t^2}. \end{cases} \\
 (4) \begin{cases} x = t(4 - t^2), \\ y = t^2(4 - t^2). \end{cases} & (5) \begin{cases} x = \frac{t^2}{1 - t^3}, \\ y = \frac{t^3}{1 - t^3}. \end{cases} & (6) \begin{cases} x = \frac{t^2}{t - 1}, \\ y = \frac{t^3}{t - 1}. \end{cases} \\
 (7) \begin{cases} x = \frac{1}{1 + t^2}, \\ y = \frac{t + t^2}{1 + t^2}. \end{cases} & (8) \begin{cases} x = \frac{t^3}{1 + t^2}, \\ y = \frac{t^2 - t^3}{1 + t^2}. \end{cases} & (9) \begin{cases} x = \frac{5t^2}{1 + t^5}, \\ y = \frac{5t^3}{1 + t^5}. \end{cases} \\
 (10) \begin{cases} x = t^2 + t, \\ y = t - 1/t. \end{cases} & (11) \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 - t^5. \end{cases} & (12) \begin{cases} x = t^4, \\ y = t^2 - t^5. \end{cases}
 \end{array}$$

## 2. Обобщенные циклоиды и планетарные кривые

Выводить уравнения циклоиды, эпициклоиды и гипоциклоиды, двухъярусной циклоиды. Найти длину одной арки циклоиды.

## 3. Исследование кривых, заданных некоторым дифференциально-геометрическим свойством

Вывод уравнения кривой по заданному дифференциально-геометрическому свойству.

## 4. Огибающая семейства плоских кривых

Вывод уравнения дискриминантной кривой и огибающей семейства плоских кривых.

## 5. Эволюта и эвольвента, натуральное уравнение плоской кривой

Уравнение соприкасающейся окружности заданной кривой в точке, определив ее радиус и центр; порядок касания кривой и окружности в этой точке, эволюта и эвольвента.

## 6. Геометрические образы, связанные с пространственной кривой. Кривизна и кручение

Научиться находить для заданной параметризованной пространственной кривой а) кривизну и кручение; б) уравнения касательной, соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали, а также репер Френе в заданной точке; в) длину дуги; г) точки спрямления и уплощения; д) натуральные уравнения

## 7. Линейчатые поверхности

Научиться выводить уравнение заданной линейчатые поверхности.

## 8. Ориентация поверхности. Односторонние поверхности

Научиться определять, является ли поверхность односторонней.

## 9. Риманова метрика на поверхности



На поверхности с заданным линейным элементом научиться находить длины кривых, углы и площадь области, ортогональные траектории семейства.

#### 10. Поверхности вращения. Асимптотические линии

Научиться находить параметрические и общие уравнения поверхности вращения, ее асимптотические линии, полную и среднюю кривизну, нормальную кривизну линий, а также главные кривизны поверхности в произвольной точке, тип точек поверхности.

#### 11. Топологические пространства

Необходимо изучить свойства топологических пространств, усвоить аксиомы отделимости, понятия внутренняя точка, предельная точка, граничная точка, точка прикосновения, изолированная точка множества, связность, компактность; внутренность, замыкание, граница множества в топологическом пространстве.

#### 12. Метрические пространства

Необходимо в теории и на практике изучить свойства метрики и метрического пространства, усвоить понятия внутренняя точка, предельная точка, граничная точка, точка прикосновения, изолированная точка множества, внутренность, замыкание, граница множества в метрическом пространстве.

1. Является ли функция  $\rho(x, y)$  метрикой на множестве вещественных чисел  $\mathbb{R}$ ? В случае отрицательного ответа придумайте (и используйте далее) другую непрерывную метрику  $\rho(x, y)$ , отличную от стандартной евклидовой  $\rho_E(x, y) = |x - y|$  и от функций  $\rho(x, y)$  в других вариантах задания.

2. Докажите, что отображение  $f : (\mathbb{R}, \rho) \rightarrow (\mathbb{R}, \rho_E)$ , где  $f(x) = x$ , является гомеоморфизмом. Докажите, что отображение с помощью той же функции пространства  $(\mathbb{R}, \rho)$  в пространство изолированных точек  $(\mathbb{R}, \rho_I)$  (см. пример 3) гомеоморфизмом не является.

3. Приводя краткие доказательства со ссылками на определения, укажите какую-либо а) внутреннюю точку  $x_0$  множества  $A$  (если существует); б) предельную точку  $x_1 \notin A$ ; в) граничную точку  $x_2$  множества  $A$ ; г) изолированную точку  $x_3 \in A$  (если существует). Найдите д) внутренность  $\mathring{A}$ ; е) замыкание  $\bar{A}$ ; ж) границу  $\partial A$ ; з) множество предельных точек  $A'$  для множества  $A$  в метрическом пространстве  $(\mathbb{R}, \rho)$ .

4. Является ли множество  $A$  в метрическом пространстве  $(\mathbb{R}, \rho)$  а) всюду плотным, б) нигде не плотным?

$$(1) \quad \rho(x, y) = |x - y|^{1/2}, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \cup (1, 2).$$

$$(2) \quad \rho(x, y) = |x^3 - y^3|, \quad A = \mathbb{Q} \cup (-1, 1).$$

$$(3) \quad \rho(x, y) = |x^2 - y^2|, \quad A = (0, 1) \setminus \mathbb{Q}.$$

#### 13. Эйлерова характеристика поверхности

Усвоение понятий многообразия, поверхности, поверхности с краем, клеточного разбиения заданной поверхности, ее эйлеровой характеристики, гладкого векторного поля на поверхности, его особых точек.

## 2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

Планируемый образовательный результат (компетенция, индикатор)	Типовые контрольные задания	Критерии оценивания и шкала оценивания
<p>ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности</p> <p><i>ОПК-1.1 Осуществляет отбор теоретического и практического материала</i></p> <p><i>ОПК-1.2 Решает типовые задачи в рамках профессиональной деятельности</i></p> <p><i>ОПК-1.3 Использует различные методы и приемы решения задач профессиональной деятельности</i></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Проверьте регулярность параметризации и найдите особые точки кривой <math>x=2(\text{sh}t-\text{cht})</math>, <math>y= \text{ch } t-\text{sh } t</math>, <math>z=e^{-3t/2}</math>.</li> <li>2. Найдите длину дуги кривой <math>x = \cos t</math>, <math>y = \sin t</math>, <math>z = t</math>, лежащей внутри шара <math>x^2+y^2+z^2=2</math>. Найдите натуральный параметр <math>s</math> на этой кривой.</li> <li>3. Найдите уравнения элементов трехгранника Френе кривой <math>x=t^3-t^2-5</math>, <math>y=3t^2+1</math>, <math>z=2t^3-16</math> в той точке <math>M</math>, где нормальная плоскость параллельна плоскости <math>2x+3y+6z=0</math>.</li> <li>4. Найдите, при каких <math>a</math> и <math>b</math> кривизна кривой <math>x=a \text{ ch } t</math>, <math>y=a \text{ sh } t</math>, <math>z=bt</math> во всех точках совпадает с кручением.</li> <li>5. Пусть <math>R</math> - радиус кривизны плоской кривой <math>\gamma</math>, <math>\alpha</math> - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой <math>\gamma</math>. Найдите параметрическое уравнение кривой <math>\gamma</math>, если <math>R = \alpha</math>.</li> <li>6. Найдите уравнение эволюты цепной линии <math>y = a \text{ ch } x/a</math>.</li> <li>7. На бинормальных плоской кривой <math>\gamma</math> откладываются отрезки, длина которых пропорциональна длине дуги кривой <math>\gamma</math>. Докажите, что у кривой, образованной концами этих отрезков, отношение кривизны к кручению постоянно.</li> <li>8. Найдите кривизну эллипса <math>x^2/a^2+y^2/b^2=1</math> в тех точках, где отрезок касательных между осями координат делится точкой касания пополам.</li> <li>9. На главных нормалях винтовой линии <math>\gamma</math> отложены отрезки длины <math>1/k</math>, где <math>k</math> – кривизна кривой <math>\gamma</math>. Найдите уравнение кривой, образованной концами этих отрезков, определите ее кривизну и кручение.</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены необходимые примеры; студент показывает понимание излагаемого материала – 31 – 40 баллов</li> <li>• Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены примеры, однако имеются неточности; в целом студент показывает понимание изученного материала – 21 – 30 балла</li> <li>• Ответ дан в основном правильно, но недостаточно аргументированы выводы, приведены не все необходимые примеры – 11 – 20 баллов</li> <li>• Даны неверные ответы на поставленные вопросы – 0 – 10 баллов</li> </ul>

## V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1) Рекомендуемая литература

#### а) Основная литература:

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. Учебное пособие. – М.: Лань, 2010. - 367 с. – Электронный ресурс. – Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=530](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=530)
2. Акивис М. А. Тензорное исчисление. Учебное пособие. – М. : Физматлит, 2005. – 305 с. Электронный ресурс. – Режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=110700>  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=67297>

#### б) Дополнительная литература:

1. Мищенко А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. Учебное пособие. М.: Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2004. - 304 с. – Электронный ресурс. – режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=544615>  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69322>

### 2) Программное обеспечение

#### а) Лицензионное программное обеспечение

MS Office 365 pro plus

MS Windows 10 Enterprise

MATLAB R2012b Пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений

Mathcad 15 M010 Система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением.

#### б) Свободно распространяемое программное обеспечение

Google Chrome;

MiKTeX 2.9 Открытый дистрибутив TeX для платформы Windows.

### 3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. [www.math.ru](http://www.math.ru) – сайт посвящён Математике и математикам. Этот сайт для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой

2. <http://www.edu.ru/> – Федеральный портал «Российское образование».

### 4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. [www.exponenta.ru](http://www.exponenta.ru) – образовательный математический сайт

2. [www.matematicus.ru](http://www.matematicus.ru) – учебный материал по различным математическим курсам.

## VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

### Учебная программа

#### Часть первая

1. Простая кривая (график дифференцируемой функции) на плоскости. Параметризованная кривая. Регулярные и нерегулярные точки. Параметризация прямой, окружности, эллипса, гиперболы, циклоиды. Радиус-вектор кривой. Теорема о строении плоской параметризованной кривой в окрестности регулярной точки.
2. Теорема о строении множества, заданного уравнением  $F(x,y)=0$ , в окрестности неособой точки; виды особых точек. Декартов лист.
3. Касательная и нормаль к плоской кривой, их уравнения. Геометрический и физический смысл производной радиуса-вектора параметризованной кривой.
4. Пространственные кривые. Параметризованные кривые в пространстве. Кривая Вивиани, винтовая линия. Строение пространственной параметризованной кривой в окрестности регулярной точки.
5. Соприкасающаяся плоскость пространственной кривой, ее инвариантность относительно замены параметра. Теорема о порядке касания кривой и ее соприкасающейся плоскости.
6. Длина дуги кривой. Натуральный параметр. Свойства первой и второй производной радиуса-вектора по натуральному параметру, их физический смысл. Вектор главной нормали. Геометрические образы, связанные с точкой пространственной кривой, их уравнения.
7. Кривизна кривой. Кривизна как модуль второй производной от радиуса-вектора по натуральному параметру. Точки спрямления. Кривые с нулевой кривизной. Кривизна окружности.
8. Формулы Френе для пространственной и плоской кривой. Кручение, его геометрический смысл. Точки уплощения. Кривые с нулевым кручением. Формулы для вычисления кривизны и кручения.
9. Порядок касания кривых. Теорема о порядке касания плоских кривых, одна из которых задана неявно, а другая – параметрически. Соприкасающаяся окружность плоской кривой. Эволюта, эвольвента, их свойства.
10. Огибающая семейства кривых на плоскости. Натуральные уравнения пространственной кривой. Теорема об определении кривой ее натуральными уравнениями. Нахождение параметрических уравнений плоской кривой по ее натуральному уравнению.
11. Простая поверхность (график дифференцируемой функции  $z=f(x,y)$ ). Гладкое отображение двумерной области в трехмерное пространство. Регулярные точки. Строение образа в окрестности регулярной точки. Определение параметризованной поверхности. Координатная сеть на поверхности. Параметрические уравнения плоскости, сферы, геликоида, цилиндра и конуса.

12. Теорема о строении множества, заданного уравнением  $F(x,y,z)=0$ , в окрестности неособой точки. Параметрические уравнения поверхностей второго порядка.
13. Линия на поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, их уравнения. Вид координатной сети в окрестности нерегулярной точки.
14. Длина кривой на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Линейный элемент плоскости в декартовых и полярных координатах, сферы в географических координатах, цилиндрической и конической поверхностей.
15. Вычисление угла между кривыми на поверхности. Угол между координатными линиями.
16. Площадь области на поверхности.
17. Поверхности вращения, их параметрические уравнения. Тор, катеноид, псевдосфера. Линейный элемент поверхности вращения.
18. Линейчатые и развертывающиеся поверхности.
19. Изометрическое отображение поверхностей. Необходимое и достаточное условие изометрии. Изометрическое отображение геликоида на катеноид. Деформация, изгибание, наложимость поверхностей. Наложение развертывающейся поверхности на плоскость.
20. Конформное отображение поверхностей. Необходимое и достаточное условие конформности соответствия. Изотермические координаты. Конформное отображение поверхности вращения на плоскость. Стереографическая проекция. Инверсия, ее свойства.
21. Нормальная кривизна кривой, лежащей на поверхности. Вторая квадратичная (фундаментальная) форма поверхности.
22. Кривизна плоских сечений поверхности. Теорема Менье.
23. Индикатриса Дюпена, классификация точек на поверхности.
24. Главные кривизны и главные направления в точке поверхности. Гауссова и средняя кривизна поверхности. Формула Эйлера.
25. Сопряженные направления на поверхности. Линии кривизны, их дифференциальное уравнение. Линии кривизны на поверхности вращения.
26. Асимптотические направления и асимптотические линии на поверхности, их свойства. Минимальные поверхности.
27. Сферическое отображение. Теорема о полной кривизне. Интегральная кривизна поверхности.
28. Деривационные уравнения поверхности.
29. Формулы Гаусса-Петерсона-Кодацци. Теорема Гаусса. Существование и единственность поверхности с заданными первой и второй квадратичными формами.
30. Геодезическая кривизна кривой на поверхности, инвариантность ее относительно изгибания. Формулы для вычисления геодезической кривизны.
31. Геодезические линии на поверхности, их свойства. Дифференциальные уравнения геодезических линий. Кинематическое свойство геодезических.

32. Полугеодезическая параметризация поверхности, вид первой квадратичной формы при полугеодезической параметризации. Геодезическая как кратчайшая линия на поверхности.
33. Поверхности постоянной гауссовой кривизны.

### **Часть вторая**

1. Метрическое пространство. Открытый шар, открытое множество, открытость объединения и пересечения (конечного числа) открытых множеств.
2. Определение топологического пространства. Метрическая и евклидова топологии, дискретная и антидискретная топологии, подпространство топологического пространства.
3. Аксиомы отделимости. Примеры топологических пространств, удовлетворяющих аксиоме  $T_k$ , но не удовлетворяющих аксиоме  $T_{k+1}$ . Хаусдорфовость метрических пространств.
4. Окрестность точки топологического пространства. Внутренняя точка, внутренность, свойства открытых множеств и свойства внутренности.
5. Точка прикосновения в топологическом пространстве. Замыкание, его свойства. Замкнутые множества, эквивалентность определений замкнутого множества.
6. Точка прикосновения, внутренняя, граничная, изолированная, предельная точка множества в топологическом пространстве. Граница множества.
7. Всюду плотные и нигде не плотные множества в топологическом пространстве. Критерии.
8. Непрерывность отображения метрических пространств. Непрерывность отображения топологических пространств. Критерий непрерывности отображения.
9. Гомеоморфизм топологических пространств и подмножеств топологического пространства. Примеры гомеоморфных множеств. Топологические инварианты.
- 10.Связность топологического пространства, подмножества топологического пространства. Критерий связности. Связность отрезка. Примеры несвязных множеств на числовой прямой. Образ связного множества при непрерывном отображении. Связность как топологический инвариант. Компонента связности точки в топологическом пространстве. Линейная связность.
11. Компактность множества в топологическом пространстве. Замкнутость компакта в хаусдорфовом пространстве. Образ компактного множества при непрерывном отображении. Компактность как топологический инвариант.

### **Список вопросов к зачёту**

1. Параметризованная кривая на плоскости. Регулярные точки параметризации. Параметрические уравнения прямой и окружности.

2. Теорема о строении параметризованной кривой в окрестности регулярной точки. Вывод параметрических уравнений циклоиды.
3. Особые и неособые точки множества, заданного уравнением  $F(x,y)=0$ . Теорема о строении такого множества в окрестности неособой точки. Параметрические уравнения эллипса и гиперболы. Декартов лист.
4. Уравнения касательной и нормали к кривой, заданной уравнениями:
  - а)  $y=f(x)$ ;    б)  $F(x,y)=0$ .
5. Радиус-вектор параметризованной кривой, заданной в  $R^3$ . Геометрический смысл производной радиус-вектора. Уравнение касательной к пространственной кривой.
6. Соприкасающаяся плоскость пространственной кривой, ее уравнение. Теорема о порядке касания кривой и ее соприкасающейся плоскости.
7. Замена параметра на параметризованной кривой. Инвариантность соприкасающейся плоскости относительно замены параметра.
8. Натуральный параметр кривой. Свойство производной радиус-вектора кривой по натуральному параметру. Направление второй производной радиуса-вектора кривой по натуральному параметру.
9. Вывод формул Френе для плоской кривой. Кривизна, ее геометрический смысл. Кривые с нулевой кривизной. Кривые с постоянной ненулевой кривизной.
10. Натуральное уравнение плоской кривой. Теорема об определении плоской кривой ее натуральным уравнением.
11. Разложение радиус-вектора  $r(t)$  в ряд Тейлора. Касание кривых, порядок касания. Условия касания второго порядка.
12. Соприкасающаяся окружность плоской кривой, выражение ее радиуса через кривизну кривой. Центр кривизны, эволюта. Свойства эволюты.
13. Бинормаль, главная нормаль, спрямляющая плоскость параметризованной пространственной кривой в регулярной точке, их уравнения.
14. Вычисление векторов  $\tau$ ,  $\nu$ ,  $\beta$  сопровождающего трехгранника пространственной кривой. Вывод формул Френе пространственной кривой.
15. Кривизна, кручение пространственной кривой, их геометрический смысл. Точки спрямления, точки уплощения. Кривые с нулевой кривизной и нулевым кручением.
16. Натуральные уравнения пространственной кривой. Теорема об определении пространственной кривой ее натуральными уравнениями.
17. Определение гладкой параметризованной поверхности. Векторное уравнение поверхности. Координатная сеть на поверхности. Параметрические уравнения плоскости и геликоида.
18. Элементарная поверхность как график гладкой функции двух переменных. Теорема о строении параметризованной поверхности в окрестности регулярной точки. Параметризация цилиндра и конуса второго порядка.

19. Особые и неособые точки множества, заданного уравнением  $F(x, y, z)=0$ . Теорема о строении такого множества в окрестности неособой точки. Параметризация сферы с помощью географических координат.
20. Уравнение линии на параметризованной поверхности. Касательный вектор к линии на поверхности, его выражение через векторы  $r_u$  и  $r_v$ . Уравнение касательной плоскости и нормали к параметризованной поверхности.
21. Односторонние поверхности. Лист Мебиуса, бутылка Клейна. Ориентация поверхности. Ориентируемые и неориентируемые поверхности.
22. Длина кривой на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Линейный элемент плоскости, сферы, цилиндра вращения.
23. Определение поверхности вращения, вывод ее параметрических уравнений. Тор, псевдосфера, их линейный элемент.
24. Поверхности переноса, их линейный элемент. Линейный элемент параболоида.
25. Вычисление угла между кривыми на поверхности. Угол между координатными линиями. Условие ортогональности координатной сети. Задача об изогональных траекториях на сфере.
26. Линейчатая поверхность, ее уравнения. Параметрические уравнения конуса, цилиндра, их линейный элемент.
27. Изометрическое отображение поверхностей. Необходимые и достаточные условия изометрии. Изометрическое отображение геликоида на катеноид.
28. Деформация, изгибание, наложимость. Теорема о наложении развешивающихся поверхностей на плоскость.
29. Конформное отображение одной поверхности на другую. Необходимые и достаточные условия конформного соответствия.
30. Изотермические координаты. Конформное отображение поверхности на плоскость. Стереографическая проекция.
31. Нормальная кривизна кривой, лежащей на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности, вычисление ее коэффициентов.
32. Кривизна линии на поверхности. Кривизна нормального сечения.
33. Главные направления и главные кривизны в точке поверхности, их вычисление. Полная (гауссова) и средняя кривизна поверхности. Полная кривизна плоскости, сферы, псевдосферы. Средняя кривизна геликоида.
34. Линии кривизны на поверхности, их дифференциальное уравнение.
35. Классификация точек поверхности. Строение поверхности в окрестности эллиптической, гиперболической и параболической точек.
36. Асимптотические направления в точке поверхности. Асимптотические линии, их свойства. Асимптотические линии на геликоиде. Минимальные поверхности.
37. Девивационные уравнения поверхности.
38. Формулы Гаусса-Петерсона-Кодацци. Теорема Гаусса. Существование и единственность поверхности с заданными первой и второй квадратичными формами.



39. Геодезическая кривизна кривой на поверхности. Инвариантность геодезической кривизны относительно изгиба.
40. Геодезические линии на поверхности. Дифференциальное уравнение геодезических линий, их свойства. Движение точки по поверхности в отсутствие внешних сил. Уравнение геодезических линий римановой метрики  $ds^2 = du^2 + Gdv^2$ .
41. Полугеодезическая параметризация поверхности. Вид первой квадратичной формы при полугеодезической параметризации. Геодезическая линия как кратчайшая на поверхности.
42. Поверхности постоянной гауссовой кривизны.
43. Выражение для геодезической кривизны через угол.
44. Теорема Гаусса-Бонне.
45. Теорема Гаусса-Бонне для  $k$ -связных поверхностей и поверхностей рода  $p$ .
46. Геометрия на поверхностях постоянной кривизны.
47. Определение метрического пространства. Примеры. Открытый шар, открытое множество.
48. Определение метрического пространства. Примеры и свойства открытых множеств: открытость открытого шара, объединения и пересечения (конечного числа) открытых множеств.
49. Определение топологического пространства. Примеры: метрическая и евклидова топологии, дискретная и антидискретная топологии, подпространство топологического пространства. Хаусдорфовость метрических пространств.
50. Аксиомы отделимости. Примеры топологических пространств, удовлетворяющих аксиоме  $T_k$ , но не удовлетворяющих аксиоме  $T_{k+1}$ .
51. Определение топологического пространства. Окрестность точки. Внутренняя точка, внутренность, свойство открытых множеств и другие свойства внутренности.
52. Точка прикосновения в топологическом пространстве. Замыкание, его свойства. Замкнутые множества, эквивалентность определений замкнутого множества.
53. Точка прикосновения, внутренняя, граничная, изолированная, предельная точка множества в топологическом пространстве. Внутренность, замыкание, граница множества. Привести пример точки прикосновения множества, которая не является предельной или изолированной точкой.
54. Всюду плотные и нигде не плотные множества в топологическом пространстве. Критерии, примеры.
55. Непрерывность отображения метрических пространств. Непрерывность отображения топологических пространств. Критерий непрерывности отображения.
56. Непрерывность отображения топологических пространств. Гомеоморфизм топологических пространств и подмножеств топологического пространства. Примеры гомеоморфных множеств. Топологические инварианты.

57. Определение связности топологического пространства, подмножества топологического пространства. Критерий связности. Примеры несвязных множеств на числовой прямой. Связность отрезка.
58. Связность подмножества топологического пространства. Образ связного множества при непрерывном отображении. Связность как топологический инвариант. Связная компонента точки в топологическом пространстве.
59. Компактность множества в топологическом пространстве. Примеры компактных и некомпактных множеств. Замкнутость компакта в хаусдорфовом пространстве.
60. Компактность множества в топологическом пространстве. Образ компактного множества при непрерывном отображении. Компактность как топологический инвариант.

### **Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Организуя свою учебную работу, студенты должны:

*Во-первых*, выявить рекомендуемый режим и характер учебной работы по изучению теоретического курса, практическому применению изученного материала, по выполнению заданий для самостоятельной работы, по использованию информационных технологий и т.д.

*Во-вторых*, ознакомиться с указанным в методическом материале по дисциплине перечнем учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям и выполнения самостоятельной работы, а также с методическими материалами на бумажных и/или электронных носителях, выпущенных кафедрой своими силами и предоставляемые студентам во время занятий.

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом должна соответствовать более глубокому усвоению изучаемого курса, формировать навыки исследовательской работы и ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике.

**1. Работа с учебными пособиями.** Для полноценного усвоения курса студент должен, прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины. Необходимо усвоить определения и понятия, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этому определению. Кроме того, необходимо знать круг фактов, связанных с данным понятием. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

**2. Самостоятельное изучение тем.** Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого

качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту.

**3. Подготовка к практическим занятиям.** При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется следовать методическим рекомендациям по работе с учебными пособиями, приведенным выше.

**4. Составление глоссария.** В глоссарий должны быть включены основные понятия, которые студенты изучают в ходе самостоятельной работы. Для полноты исследования рекомендуется вписывать в глоссарий и те термины, которые студентам будут раскрыты в ходе лекционных занятий.

**5. Составление конспектов.** В конспекте отражены основные понятия темы. Для наглядности и удобства запоминания использованы схемы и таблицы.

**6. Подготовка к зачету.** При подготовке к зачету студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе занятий.

Качество усвоения студентом каждой дисциплины оценивается по 100-балльной шкале.

Интегральная рейтинговая оценка (балл) по каждому (периоду обучения) складывается из оценки текущей работы студентов на семинарских и практических занятиях, выполнения индивидуальных творческих заданий и др. и оценки за выполнение студентом учебного задания при рейтинговом контроле успеваемости. При этом доля баллов, выделенных на рейтинговый контроль не должна превышать 50% общей суммы баллов данного модуля (периода обучения).

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся зачетом, по итогам семестра составляет 100 баллов (50 баллов – 1-й модуль и 50 баллов – 2-й модуль).

Студенту, набравший 40 баллов и выше по итогам работы в семестре, в экзаменационной ведомости и зачетной книжке выставляется оценка «зачтено». Студенту, набравшему до 39 баллов включительно, сдает зачет,

Согласно подходам балльно-рейтинговой системы в рамках оценки знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности дисциплины установлены следующие аспекты:

- Содержание учебной дисциплины в рамках одного семестра делится на два модуля (периода обучения). По окончании модуля (периода обучения) осуществляется рейтинговый контроль успеваемости знаний студентов.

- Сроки проведения рейтингового контроля:

*осенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса;

*весенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

## **VII. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебная аудитория, оснащенная комплектом мультимедийной техники. Меловая доска, комплект учебной мебели.

Учебная аудитория: 224 (170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Мультимедийный комплект учебного класса (вариант № 2) Проектор Casio XJ-M140, настенный проекц. Экран Lumien 180*180, ноутбук Dell N4050, сумка 15,6", мышь. Меловая доска, комплект учебной мебели.	Microsoft Office профессиональный плюс 2013 – Акт приема передачи № 689 от 05.07.2019 г.; Microsoft Windows 10 Enterprise Акт приема передачи №689 от 05.07.2019 г.; Google Chrome – бесплатное ПО; Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав №969 18.10.2018 г.
--	--	---

## **VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Дата и № протокола заседания кафедры, утвердившего изменения
1.			
2.			