

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 20.11.2023 11:17:52  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:  
Руководитель ООП  
С.М.Дудаков  
2023 г.



Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

## КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Математическое моделирование

Для студентов III курса

Очная форма

Составитель: Зингерман К.М., д.ф.-м.н., профессор

Тверь, 2023

## **I. Аннотация**

### **1. Цель и задачи дисциплины**

Цель освоения дисциплины: дать студентам систематические знания по методам комплексного анализа и научить их применять эти знания к решению задач математического моделирования.

Задачами освоения дисциплины являются:

- приобретение студентами знаний основных понятий и методов теории функций комплексного переменного.
- приобретение студентами навыков решения типовых задач комплексного анализа.
- приобретение студентами знаний об основных сферах применения комплексного анализа в математическом моделировании.

### **2. Место дисциплины в структуре ООП**

Данная дисциплина относится к разделу «Математический» обязательной части Блока 1.

Для изучения этой дисциплины необходимы базовые знания, полученные в результате изучения курсов математического анализа, алгебры, дифференциальных уравнений. Освоение данной дисциплины необходимо для изучения курса «Численные методы решения задач математической физики», дисциплин профиля подготовки и элективных дисциплин по профилю "Математическое моделирование", для подготовки выпускной работы бакалавра для студентов, обучающихся по профилю "Математическое моделирование".

**3. Объем дисциплины:** 3 зачетных единицы, 108 академических часов, в том числе:

**контактная аудиторная работа:** лекции 30 часа, практические занятия 30 часов;

**контактная внеаудиторная работа:** контроль самостоятельной работы \_\_\_--\_\_\_, в том числе курсовая работа \_\_\_--\_\_\_;

**самостоятельная работа:** 48 часов, в том числе контроль 0 часов.

**4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы**

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
<i>Указывается код и наименование компетенции</i>	<i>Приводятся индикаторы достижения компетенции в соответствии с учебным планом</i>
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2 Использует базовые знания в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности, вносит некоторые коррективы при их использовании в профессиональной деятельности ОПК-1.3 Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических и естественных наук к решению задач профессиональной деятельности

**5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения:** зачет (5 семестр).

**6. Язык преподавания** русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Самостоятельная работа, в том числе Контроль (час.)	
		Лекции		Практические занятия			Контроль самостоятельной работы (в том числе курсовая работа)
		всего	В т.ч. практическая подготовка	всего	В т.ч. практическая подготовка		

1. Алгебра комплексных чисел и применение комплексных чисел для решения физических задач.	20	6	0	6	0	–	8
2. Дифференцирование и интегрирование регулярных функций комплексного переменного	22	6	0	8	0	–	8
3. Ряды Тейлора и Лорана.	20	6	0	6	0	–	8
4. Теория вычетов	18	6	0	6	0	–	6
5. Конформные изображения	12	2	0	2	0	–	8
6. Операционное исчисление	16	4	0	2	0	–	10
ИТОГО	108	30	0	30	0	–	48

### III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем (в строгом соответствии с разделом II РПД)	Вид занятия	Образовательные технологии
1. Алгебра комплексных чисел и применение комплексных чисел для решения физических задач.	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
2. Дифференцирование и интегрирование регулярных функций комплексного переменного	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
3. Ряды Тейлора и Лорана.	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
4. Теория вычетов	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
5. Конформные изображения	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
6. Операционное исчисление	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, практических занятий и самостоятельной работы студентов. В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные

технологии, способы и методы формирования компетенций: традиционные лекции, практические занятия в диалоговом режиме. Дисциплина предусматривает выполнение контрольных работ, собеседование по теоретическим вопросам.

#### **IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации**

Для проведения текущей и промежуточной аттестации:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

1. Дать геометрическую интерпретацию комплексных чисел, модуля и аргумента комплексного числа.
2. Объяснить понятие аналитической функции комплексного переменного.
3. Пояснить применение аналитических функций комплексного переменного к моделированию тепловых полей, течений жидкости.

Способ проведения – устный.

Критерии оценивания:

Пояснение дано полно и правильно – 3 балла.

Пояснение дано с незначительными погрешностями – 2 балла.

Пояснение дано с существенными неточностями – 1 балл.

Пояснение не дано – 0 баллов.

ОПК-1.2 Использует базовые знания в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности, вносит некоторые коррективы при их использовании в профессиональной деятельности

1. Доказать теорему о среднем, исходя из формулы Коши.
2. Доказать теорему о вычетах.

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Доказательство дано полно и правильно – 5 балла.

Доказательство дано с незначительными погрешностями – 4 балла.

Доказательство дано с существенными неточностями – 3 балл.

Доказательство не дано – 0 баллов.

ОПК-1.3 Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических и естественных наук к решению задач профессиональной деятельности

1. Используя метод неопределенных коэффициентов и формулу суммы геометрической прогрессии, разложить функцию  $f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}$  в ряд Лорана в области  $1 < |z| < 2$ .

2. Используя аппарат комплексного анализа, вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

3. Используя условия Коши-Римана, найти аналитическую функцию комплексного переменного  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  по заданной действительной части  $u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$ .

4. Используя теорему о вычетах, вычислить  $\int_c \frac{e^z}{z^2(z-9)} dz$  по контуру

$$c = \{|z| = 4\}.$$

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Задача решена правильно с помощью аппарата комплексного анализа – 5 балла.

Задача решена с незначительными погрешностями – 4 балла.

Задача решена с существенными неточностями – 3 балл.

Задача не решена или не применен аппарат комплексного анализа – 0 баллов.

## V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1) Рекомендуемая литература

#### Основная литература:

1. Ахтамова, С. С. Теория функций комплексного переменного: учебно-методическое пособие / С. С. Ахтамова, Е. К. Лейнартас, А. П. Ляпин. — Красноярск : СФУ, 2020. — 100 с. — ISBN 978-5-7638-4330-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/181631>
2. Половинкин, Е. С. Теория функций комплексного переменного: учебник / Е. С. Половинкин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: ИНФРА-М, 2023. — 253 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/1845987. - ISBN 978-5-16-017359-7. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1913992>
3. Карасев И.П. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / И.П. Карасев. - Москва: Физматлит, 2008. - 215 с. - ISBN 978-5-9221-0960-4; [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68139>

#### Дополнительная литература:

1. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) : учебное пособие / В. Ф. Чудесенко. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 192 с. — ISBN 5-8114-0661-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210395> (дата обращения: 19.10.2023).

### 2) Программное обеспечение

<b>Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 4б (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)</b>	
Adobe Acrobat Reader DC - Russian	бесплатно
Apache Tomcat 8.0.27	бесплатно
Cadence SPB/OrCAD 16.6	Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009
GlassFish Server Open Source Edition 4.1.1	бесплатно
Google Chrome	бесплатно
Java SE Development Kit 8 Update 45 (64-bit)	бесплатно
JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3	бесплатно
JetBrains PyCharm Edu 3.0	бесплатно

Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus 1.4.0	бесплатно
Mathcad 15 M010	Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011
MATLAB R2012b	Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно
МиKTeX 2.9	бесплатно
MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK	бесплатно
NetBeans IDE 8.0.2	бесплатно
NetBeans IDE 8.2	бесплатно
Notepad++	бесплатно
Oracle VM VirtualBox 5.0.2	бесплатно
Origin 8.1 Sr2	договор №13918/М41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»
Python 3.1 pygame-1.9.1	бесплатно
Python 3.4 numpy-1.9.2	бесплатно
Python 3.4.3	бесплатно
Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64-bit)	бесплатно
WCF RIA Services V1.0 SP2	бесплатно
WinDjView 2.1	бесплатно
R Studio	бесплатно
Anaconda3 2019.07 (Python 3.7.3 64-bit)	бесплатно

1. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы
  1. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com);
  2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/>;
  3. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>.
2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины
  - Сайт поддержки учебного процесса по дисциплине: <http://prog.tversu.ru>
  - Виртуальная образовательная среда ТвГУ (<http://moodle.tversu.ru>)
  - Научная библиотека ТвГУ (<http://library.tversu.ru>)
  - Сайт ТвГУ (<http://university.tversu.ru>)



## **VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

Важной составляющей данного раздела РПД являются требования к рейтинг-контролю с указанием баллов, распределенных между модулями и видами работы обучающихся.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся зачетом, по итогам семестра составляет 100 баллов (50 баллов - 1-й модуль и 50 баллов - 2-й модуль).

Студенту, набравшему 40 баллов и выше по итогам работы в семестре, в экзаменационной ведомости и зачетной книжке выставляется оценка «зачтено». Студент, набравший до 39 баллов включительно, сдает зачет.

Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

### **Вопросы к зачету**

1. Понятие о комплексных числах. Операции над комплексными числами.
2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Геометрический смысл возведения комплексного числа в степень и извлечения корня.
3. Понятие функции комплексного переменного. Непрерывность, дифференцируемость и аналитичность. Условия Коши-Римана.
4. Элементарные функции комплексного переменного.
5. Физические приложения функций комплексного переменного.
6. Интегрирование функций комплексного переменного. Теорема Коши.
7. Теорема об аналитичности интеграла от функции комплексного переменного. Теорема о первообразных.
8. Интегрирование функций комплексного переменного в многосвязных областях.
9. Формула Коши и теорема о среднем.
10. Принцип максимума и лемма Шварца.
11. Понятие о равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся последовательностей непрерывных функций.
12. Высшие производные аналитических функций. Неравенства Коши.
13. Ряды Тейлора аналитических функций.
14. Степенные ряды. Теорема об аналитичности суммы степенного ряда. Теорема о дифференцировании рядов. Теорема Абеля. Радиус сходимости ряда.
15. Нули аналитических функций. Теорема единственности.
16. Ряды Лорана.
17. Особые точки аналитических функций.
18. Понятие вычета. Вычисление интегралов с использованием вычетов.
19. Логарифмический вычет. Теорема о логарифмической производной. Принцип аргумента.
20. Понятие бесконечно удаленной точки. Вычет функции в этой точке.
21. Операционный метод. Преобразование Лапласа. Обратное преобразование.

22. Свойства преобразования Лапласа.
23. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных и интегральных уравнений.
24. Применение преобразования Лапласа к расчету электрических контуров.
25. Понятие конформного отображения.

### Примерные задачи для зачета

1.  $\arcsin(i) = x + iy$ ,  $x = ?$   $y = ?$
2.  $|z-1| + |z+1| = 3$ . Найти геометрическое место точек.
3. Исследовать дифференциал функции  $f(z) = |z|$  в  $(\cdot) z=0$ .
4.  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$   $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ . Найти  $f(z)$ , дифференцируемую в  $\forall (\cdot) z$ .
5. Исследовать дифференциал функции  $f(z) = z^n$ .
6. Найти разложение  $f(z) = \frac{z^3}{(z^2-4)^2}$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0 = -z$ .
7. Вычислить  $\int_c \frac{e^z}{z^2(z=9)} dx$  по контуру  $c = \{|z|=4\}$
8. Вычислить  $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$ .
9. Найти вычет в точке  $z = \infty$ ,  $f(z) = z \cdot \cos \frac{\pi}{z}$ .
10. Вычислить  $\arcsin(1+i) = x + iy$ .
11. Вычислить  $\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left( \frac{1+2\cos\varphi}{5+4\cos\varphi} \right)$
12. Вычислить  $\int_0^\infty \frac{x^2 ax}{(x^2 + a^2)^2} dx$ .

### Требования к рейтинг-контролю.

### Расчет баллов за семестр в целом

1. Посещение лекций – 14 баллов (по 1 баллу за занятие)

2. Посещение практических занятий – 16 баллов (по 1 баллу за занятие).
3. Решение задач у доски на практических занятиях – 30 баллов (по 3 балла за задачу, решенную у доски, но не более 15 баллов за каждый модуль).
4. Контрольные работы – 20 баллов (2 контрольные работы).
5. Собеседование по теоретическим вопросам – 20 баллов.

### Распределение баллов по модулям

Модуль 1. Темы – «Алгебра комплексных чисел», «Дифференцирование и интегрирование аналитических функций», «Ряды Лорана».

1. Посещение лекций – 6 баллов;
  2. Посещение практических занятий – 8 баллов;
  3. Решение задач на практических занятиях – 15 баллов;
  4. Контрольная работа – 10 баллов.
- Всего 39 баллов.

Модуль 2. Темы – «Теория вычетов», «Конформные отображения», «Операционное исчисление».

1. Посещение лекций – 8 баллов;
  2. Посещение практических занятий – 8 баллов;
  3. Решение задач на практических занятиях – 15 баллов;
  4. Контрольная работа – 10 баллов;
  5. Собеседование по теоретическим вопросам – 20 баллов.
- Всего 61 балл.

### Примеры решений типовых задач

**Задача 1.** разложить функцию  $f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0 = 0$  в области  $1 < |z| < 2$ .

*Решение.* Методом неопределенных коэффициентов устанавливаем, что

$$\frac{1}{(1-z)(z+2)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+2} \right).$$

1. Рассмотрим  $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$  для  $|z| > 1$  имеем

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \left( \frac{1}{1-1/z} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Пояснение. Дробь  $\frac{1}{1-1/z}$  представляет сумму геометрической

прогрессии, имеющей показатель  $q = \frac{1}{z}$  и  $|q| < 1$ .

2. Рассмотрим  $f_2(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-z/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$ .

3. Объединив 1. и 2. получим окончательный результат:

$$f(z) = \frac{1}{3}(f_1(z) + f_2(z)) = -\frac{1}{3} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} \right).$$

**Задача 2.** Функция комплексного переменного  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  аналитическая  $u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$ . Найти  $f(z)$ .

*Решение.*  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$ .

Используем первое условие Коши-Римана для аналитической функции:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -6xy.$$

Решив уравнение  $\frac{\partial v}{\partial y} = -6xy$ , имеем

$$v = -3xy^2 + g(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2 + g'(x) \quad (1)$$

Используем второе условие Коши-Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2 \quad (2)$$

Объединив (1) и (2), получим

$$-3y^2 + 3x^2 = 3y^2 + g'(x),$$

$$g'(x) = 3x^2, g(x) = 3x^3 + c,$$

$$v(x, y) = 3xy^2 + x^3 + c,$$

$$f(z) = (y^3 - 3x^2 y) + i(-3xy^2 + x^3) + c = z^3 + c, (z = x + iy)$$

**Задача 3.** Найти главную часть ряда Лорана  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$  в окрестности точки  $z_0 = i$ .

*Решение.* Представим  $f(z) = \frac{1}{z-i} g(z)$ , где  $g(z) = \frac{1}{z+i}$  аналитическая в окрестности  $z_0 = i$  функция и может быть разложена в ряд Тейлора:

$$g(z) = \frac{1}{2i + (z-1)} = \frac{1}{2i} + \frac{1}{4}(z-i) + \dots$$

Отсюда главная часть ряда Лорана:

$$f_1(z) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i}.$$

**Задача 4.** Вычислить вычет функции  $f(z) = \operatorname{ctg}(z)$  в точках  $z_k = k\pi$ .

*Решение.* Точки  $z_k = k\pi$  являются простыми полюсами для  $f(z)$  и можно воспользоваться следующей формулой для простых полюсов:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{\cos(\pi k)}{\cos(\pi k)} = 1$$

**Задача 5.** вычислить интеграл  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cdot \cos \varphi + a^2}$ ,  $|a| < 1$ .

*Решение.* Сделаем замену переменных  $z = e^{i\varphi}$ , получим:

$$I = \int_{|z|=1} \frac{idz}{az^2 - (a^2 + 1)z + a}.$$

Уравнение  $az^2 - (a^2 + 1)z + a = 0$  имеет корни  $z_1 = a$  и  $z_2 = 1/a$ , которые являются простыми полюсами подынтегральной функции. Так как  $|a| < 1$ , то в круге  $|z| = 1$  находится только точка  $z_1 = a$ . По теореме о вычетах имеем:

$$I = 2\pi \cdot i \cdot \operatorname{res}_{z=a} \frac{i}{az^2 - (a^2 + 1)z + a} = \frac{z\pi \cdot i}{a^2 - 1} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

**Задача 6.** Вычислить интеграл  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$ .

*Решение.* Подынтегральная функция является рациональной. Для таких функций имеет место формула:

$$I = 2\pi \cdot i \sum_k \operatorname{res}_{z=z_k} f(z), \text{ где } f(z) = \frac{z}{z^2 + 4z + 13}.$$

$f(z)$  имеет два кратных полюса (кратности 2)  $z_1 = -2 + 3i$  и  $z_2 = -2 - 3i$   
 $\operatorname{Im} z_2 < 0$ , поэтому имеем :

$$I = 2\pi \cdot i \sum_k \operatorname{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{2\pi i}{i} \frac{4}{6^3} = \frac{\pi}{27}.$$

## VII. Материально-техническое обеспечение

Для аудиторной работы.

Учебная аудитория № 7 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, меловая доска.
Учебная аудитория № 20 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, экран, проектор.

Для самостоятельной работы.

Помещение для самостоятельной работы обучающихся: Компьютерный класс факультета ПМиК	Компьютер, экран, проектор,
---	-----------------------------

№ 46 170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35	кондиционер.
--	--------------

### VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№ п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения
1.	11. 2) Программное обеспечение	Внесены изменения в список ПО	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета
2.	V. 1) Рекомендуемая литература	Обновление ссылок на литературу	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета