

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 09.10.2023 14:16:55  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»



Утверждаю:

Руководитель ООП

 А.А. Голубев

«19» окт 2019г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

**Комплексный анализ**

Направление подготовки

**01.03.01. МАТЕМАТИКА**

Профиль подготовки

**Преподавание математики и информатики**

Для студентов 3 курса

Форма обучения очная

Составитель:

  
к.ф.-м.н., доцент С.Ю. Граф

Тверь, 2019

## I. Аннотация

### 1. Цель и задачи дисциплины

Целями освоения дисциплины являются изучение основных понятий, необходимых для успешного освоения ООП и в последующей профессиональной деятельности.

**Основная задача учебного курса:** изучение основ теории функций комплексного переменного, изучение различных методов теории функций комплексного переменного, применяющихся при решении прикладных задач. В результате изучения курса студент должен знать теоретические основы и практические приложения разделов теории функций комплексного переменного; иметь представление о приложениях различных методов теории функций комплексного переменного к задачам физики и других естественных наук.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части блока 1 учебного плана – к дисциплинам, формирующим универсальные и общепрофессиональные компетенции. Дисциплина имеет логические и содержательно-методические взаимосвязи со всеми математическими и естественнонаучными дисциплинами. Необходима для изучения этих дисциплин. Для освоения дисциплины необходимы знание курса «Математический анализ» и наличие устойчивых навыков работы с объектами этого курса.

Дисциплина изучается на 3 курсе (5 семестр).

### 3. Объем дисциплины: 5 зачетных единиц, 180 академических часов, в том числе:

**контактная аудиторная работа:** лекции 34 часа, практические занятия 34 часа;

**самостоятельная работа:** 112 часов, в том числе контроль 27 часов.

### 4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Осуществляет отбор теоретического и практического материала ОПК-1.2 Решает типовые задачи в рамках профессиональной деятельности

	ОПК-1.3 Использует различные методы и приемы решения задач профессиональной деятельности
--	--

**5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения экзамен (5 семестр).**

**6. Язык преподавания: русский.**

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)		Самостоятельная работа (час.)
		лекции	Практические занятия	
<b>Раздел 1</b> <b>Поле комплексных чисел</b>	<b>22</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>14</b>
Поле комплексных чисел, аксиоматика множества комплексных чисел.	4	1	1	2
Модуль и аргумент комплексного числа. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представления комплексного числа. Степень и радикал, формула Муавра.	6	1	1	4
$\mathbb{C}$ как метрическое пространство. Евклидова и сферическая метрики. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость, сфера Римана. Сходящиеся последовательности в $\mathbb{C}$ и $\bar{\mathbb{C}}$ . Лемма о покоординатной сходимости. Критерий Коши, теорема Больцано-Вейерштрасса. Полнота и компактность расширенной комплексной плоскости.	8	2	2	4
Топологии в $\mathbb{C}$ и $\bar{\mathbb{C}}$ (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, дополнение к множеству, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).	4	0	0	4
<b>Раздел 2</b> <b>Функции комплексного переменного</b>	<b>30</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>18</b>
Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного. Непрерывность в сферической метрике. Теоремы о непрерывных функциях комплексного переменного на компакте, континууме, в области.	10	2	2	6
Дифференцируемость в смысле действительного и комплексного	12	2	2	8

анализа. Моногенные и голоморфные функции (определения, примеры). Формальные производные. Критерий моногенности и ф.к.п. в точке, условия Коши-Римана. Производная голоморфной функции.				
Касательное отображение и якобиан дифференцируемого отображения. Локальное поведение дифференцируемого отображения с ненулевым якобианом. Локальное поведение голоморфного отображения. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Определение конформного отображения в точке и области. Достаточные условия конформности отображения. Основные принципы теории конформных отображений, теорема Римана о конформных отображениях.	8	2	2	4
<b>Раздел 3</b> <b>Интегралы от функций</b> <b>комплексного переменного</b>	<b>26</b>	<b>10</b>	<b>4</b>	<b>12</b>
Криволинейные интегралы в ТФКП. Определение, свойства, примеры, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода из курса действительного анализа. Переход к пределу под знаком интеграла.	5	2	1	2
Интегральная теорема Коши и её обобщение на многосвязные области.	7	2	1	4
Интегральная формула Коши.	5	2	1	2
Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных.	4	2	0	2
Первообразная от ф.к.п. Формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.	5	2	1	2
<b>Раздел 4</b> <b>Ряды Тейлора и Лорана</b>	<b>36</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>20</b>
Последовательности и ряды аналитических функций в области. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций.	9	2	2	5

Степенные ряды. Теорема Абеля и теорема о круге сходимости, формула Коши – Адамара. Локально равномерная сходимость степенного ряда. Действия со степенными рядами, почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов.	9	2	2	5
Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы, единственность разложения. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.	8	2	2	4
Ряды Лорана, структура области сходимости. Теорема о представлении голоморфной функции рядом Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.	4	2	2	0
Теорема Лиувилля. Доказательство с её помощью теоремы Гаусса о существовании комплексного корня у любого многочлена, отличного от константы. Внутренняя теорема единственности. Нули голоморфных функций. Факторизация голоморфной функции в окрестности её нуля.	6	0	0	6
<b>Раздел 6</b> <b>Изолированные особые точки и вычеты</b>	<b>66</b>	<b>6</b>	<b>12</b>	<b>48</b>
Изолированные особые точки голоморфной функции, классификация изолированных особых точек однозначного характера: устранимая особая точка, полюс, порядок полюса, существенная особая точка. Бесконечно удаленная точка как особая. Критерии изолированных особых точек. Классификация и критерии изолированной особой точки на бесконечности.	19	2	4	13
Определение вычета в изолированной особой точке и формулы для	23	2	4	17

вычисления вычетов. Примеры. Вычисление вычета на бесконечности. Примеры. Теорема Коши о вычетах. Теорема о сумме вычетов.				
Применения вычетов для нахождения определенных интегралов. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов и главных значений интегралов от действительных функций. Примеры.	24	2	4	18
<b>Итого</b>	<b>180</b>	<b>34</b>	<b>34</b>	<b>112</b>

### **III. Образовательные технологии**

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании аудиторных занятий и различных форм самостоятельной работы студентов.

Также на занятиях практикуется самостоятельная работа студентов, выполнение заданий в малых группах, письменные работы, моделирование дискуссионных ситуаций, работа с раздаточным материалом, привлекаются ресурсы сети INTERNET. Курс предусматривает выполнение контрольных и самостоятельных работ, письменных домашних заданий. В качестве форм контроля используются различные варианты взаимопроверки и взаимоконтроля.

Интерактивное взаимодействие студентов с одной стороны и преподавателя с другой, а также студентов между собой и с преподавателем во время практических занятий.

#### ***Образовательные технологии***

1. Дискуссионные технологии
2. Информационные (цифровые)
3. Технологии развития критического мышления

#### ***Современные методы обучения***

1. Активное слушание
2. Лекция (традиционная)

### **IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации**

#### ***1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации***

Практические занятия по дисциплине «Комплексный анализ» необходимы для получения навыков применения теоретических знаний,

полученных студентами на лекциях при решении конкретных практических задач. Решения задач фиксируются в тетрадях для практических работ и оцениваются согласно «Руководству по рейтинговой системе». Для более полного освоения материала в данном методическом руководстве по каждой изучаемой теме предлагаются *контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы*, результативность выполнения которых оценивается также с помощью рейтинговых баллов.

## Типовые задачи для текущего контроля

### Комплексные числа

1. Найти все значения радикала  $\sqrt{1 + \sqrt[3]{-1}}$ .
2. Найти все значения  $i^{\sin i}$ .
3. Вычислить  $\alpha = e^{\ln 2 + i\pi/2}$  и изобразить точку на плоскости.
4. Вычислить  $\operatorname{sh}(\ln 3 + i\pi)$ .
5. Вывести формулы стереографической проекции и формулу для сферического расстояния. Найти сферическое расстояние между точками 1 и  $\infty$ ,  $i$  и  $-i$ .
6. Написать комплексные параметрические уравнения окружности с данным центром и радиусом, эллипса и гиперболы с фокусами в точках  $\pm 1$  и данными полуосями, параболы  $y = x^2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , отрезка прямой, соединяющей две точки.

### Голоморфные функции

7. Является ли функция  $w = ze^{2i\bar{z}}$  голоморфной в начале координат? Доказать голоморфность функций  $\sin z$  и  $\operatorname{ch} z$  на  $\mathbf{C}$ .
8. Восстановить голоморфную функцию по заданной ее реальной части  $u = x^3 - 3x^2y + 2x^2 - 2y^2 + e^x \sin y$ ,  $(x, y) \in \mathbf{C}$ .

### Конформные отображения

9. Методом слоев найти образы верхнего единичного полукруга при преобразованиях  $w = 1/z$ ,  $w = 1/\bar{z}$  и  $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ .
10. Найти общий вид мебиусовых преобразований верхней полуплоскости на себя, верхней полуплоскости на единичный круг, единичного круга на себя.
11. Какая часть плоскости сжимается при отображении  $w = \frac{z}{2z-1}$ ? Какая часть плоскости растягивается при отображении  $w = e^{2iz}$ ?

### Ряды Тейлора и Лорана

12. Найти область сходимости функционального ряда:

$$(a) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{2\nu}}{3^\nu}; \quad (б) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sin^\nu(z); \quad (в) \sum_{\nu=-1}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^\nu.$$



13. Найти нули и изолированные особые точки функций:

$$(a) \frac{z \cos z}{\sin^2 z}; \quad (б) \frac{\sin^2 z}{e^z - 1}; \quad (в) \frac{z^2 - zi}{e^{1/z} + 1}.$$

Определить порядки нулей и классифицировать и.о.т.

14. Представить рядами Лорана в проколотой окрестности точки  $z=a$  следующие функции

$$(a) \frac{z}{z^2 - 3z + 2}, \quad a = 1; \quad (б) \frac{z^2}{z^3 + 1}, \quad a = \infty;$$

$$(в) \frac{\sin^2 z}{z}, \quad a = 0; \quad (г) \frac{\operatorname{ch}^2 z}{z^2}, \quad a = 0.$$

### Вычеты и их применение

15. Найти вычеты заданных функций в ее и.о.т., включая точку  $z = \infty$ :

$$(a) \frac{\operatorname{tg} z - z}{(1 - \cos z)^2}; \quad (б) \frac{z}{\operatorname{ch} z - 1};$$

$$(c) z^3 \sin \frac{\pi}{z}; \quad (д) \sin z \cdot \sin \frac{1}{z}.$$

16. Вычислить с помощью теоремы о вычетах интегралы:

$$(a) \oint_{|z|=4} \frac{z}{z+3} e^{1/3z} dz; \quad (б) \oint_{|z+1|=2} \frac{dz}{z \sin z};$$

$$(в) \oint_{|z|=2} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz; \quad (г) \oint_{|z|=1/2} \frac{dz}{(2 + \sqrt{z-1}) \sin z}, \quad (\sqrt{z-1}|_{z=0} = i).$$

17. Применяя лемму Жордана, вычислить интегралы:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}; \quad (б) \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \quad 0 < a < b;$$

$$(c) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 5x + 6}; \quad (д) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2 + 4)(x-1)}.$$

18. Вычислить интегралы вида  $\int_0^{2\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi$ :

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3 \cos \varphi}; \quad (б) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, \quad -1 < a < 1, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$(в) \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{1 - a \sin^2 \varphi}, \quad 0 < a < 1; \quad (г) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2 \cos \varphi)^n}{5 + 4 \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi, \quad n = 0, 1, \dots$$

19. Вычислить несобственные интегралы от рациональных функций:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}; \quad (б) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$(в) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^3 + 1}; \quad (г) \text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}.$$

### Контрольные работы (образцы задач)

#### Контрольная работа № 1

1. Выполнить арифметические действия над комплексными числами:

а)  $(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^5$ ;                      б)  $(-\sqrt{6} + \sqrt{2}i)^5$ ;

в)  $\sqrt[3]{\frac{(2-2i)^4 + 72 + 4i}{(1-2i)^2 + 5i}}$ ;      г)  $\sqrt[4]{\frac{(1+\sqrt{3}i)^6 - 60 + 2i}{(2-i)^3 - 6 + 9i}}$ ;

д)  $\sqrt[5]{64\sqrt{2}(1+\sqrt{3}i)}$ ;                      е)  $\sqrt[5]{64\sqrt{2}(\sqrt{3}+i)}$ .

2. Изобразить на комплексной плоскости  $\mathbf{C}$  области, заданные системами неравенств:

а)  $\begin{cases} |z - 3i| < 2, \\ |\arg z - \pi/2| < \pi/6, \\ \operatorname{Im} z < 4; \end{cases}$ ;      б)  $\begin{cases} |z - 1 + i| < 2, \\ |\arg z - \pi/2| < \pi/3, \\ \operatorname{Im} z > -1. \end{cases}$

3. Выяснить, какие линии на плоскости записаны следующими уравнениями:

а)  $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$ ;                      б)  $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0$ .

4. Выяснить, какие множества на плоскости заданы следующими неравенствами:

а)  $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$ ;                      б)  $\operatorname{Im} \frac{1}{z} > \frac{1}{2}$ .

5. Доказать тождества:

а)  $|z_1 \bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$ ;

б)  $|z_1 \bar{z}_2 - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$ .

6. Пусть  $z_1$  и  $z_2$  - комплексные числа, а  $a_1$  и  $a_2$  - действительные числа ( $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ ). Доказать неравенства:

а)  $2 \frac{|a_1 z_1 + a_2 z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2} \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1^2 + z_2^2|$ ;

б)  $2 \frac{|a_1 z_1 + a_2 z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2} \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1^2 + z_2^2|$ .

У к а з а н и е. Ввести вспомогательный угол  $\alpha$  такой, что  $\operatorname{tg} \alpha = a_1/a_2$ , представить левую часть доказываемого неравенства в виде  $A + B \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$  и найти её соответственно наименьшее и наибольшее значения.

7. Доказать формулы:

а)  $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$ ,  $x \neq \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;

а)  $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$ ,  $x \neq \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

8. Решить уравнения:

а)  $\sin z = \frac{5}{3}$ ; б)  $\cos z = \frac{3i}{4}$ ; в)  $\operatorname{sh} z = 0$ ; г)  $\operatorname{ch} z = 0$ .

9. Доказать следующие равенства:

а)  $\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}$ ; б)  $\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i+z}{i-z}$ ;

в)  $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$ ; г)  $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ .

10. Найти все значения следующих степеней:

а)  $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$ ; б)  $i^{\sin i}$ .

### Контрольная работа №2

1. Является ли функция  $w = e^{2i\bar{z}}$  голоморфной в начале координат? Доказать, опираясь на теорему Коши-Римана, голоморфность на  $\mathbb{C}$  следующих функций: а)  $\sin z$ ; б)  $\operatorname{ch} z$ .

2. Найти множества точек, в которых функции моногенны, голоморфны и вычислить производные функций в этих точках:

а)  $f(z) = z(\bar{z} - 3 \operatorname{Im} z)$ ; б)  $f(z) = 2xy - i(x^2 - y^2)$ .

3. Восстановить голоморфные функции по их действительной части  $U(x; y)$  или мнимой части  $V(x; y)$ :

а)  $V(x; y) = 3x^2 y - y^3$ ,  $f(i) = 0$ ; б)  $U(x; y) = x^3 - 3xy^2$ ,  $f(i) = 0$ ;

в)  $U(x; y) = e^{-y} \sin x + y$ ,  $f(0) = 1$ ; г)  $V(x; y) = e^{-y} \cos x + x$ ,  $f(0) = 1$ ;

д)  $V(x; y) = y \cos y \operatorname{ch} x + x \sin y \operatorname{sh} x$ ,  $f(0) = 0$ ;

е)  $U(x; y) = x \cos x \operatorname{ch} y + y \sin x \operatorname{sh} y$ ,  $f(0) = 0$ .

4. Написать комплексные параметрические уравнения окружности с данным центром и радиусом, эллипса и гиперболы с фокусами в точках  $\pm 1$  и данными полуосями, параболы  $y = x^2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , отрезка прямой, соединяющей две точки.

5. Установить, какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается при следующих отображениях:

а)  $w = z^2 - 2z$ ; б)  $w = \frac{z}{2z-1}$ ; в)  $w = \frac{1+iz}{1-iz}$ ; г)  $w = e^{2iz}$ .

6. Найти множества всех тех точек  $z_0$ , в которых угол поворота при следующих отображениях равен нулю:

а)  $w = z^2 - 2z$ ; б)  $w = \frac{z}{2z-1}$ ; в)  $w = \frac{1+iz}{1-iz}$ ; г)  $w = e^{2iz}$ .

7. Найти длины образов следующих кривых  $\Gamma$  при указанных отображениях:

а)  $\Gamma : z(t) = it + 1$ ,  $t \in [0; 1]$ ;  $f(z) = z^2$ ;

б)  $\Gamma : z(t) = (1+i)t$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ ;  $f(z) = e^z$ ;

в)  $\Gamma : z(t) = it$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ ;  $f(z) = e^z$ ;

г)  $\Gamma: z(t) = (1+i)t, t \in [0;1]; f(z) = z^n, n \in \mathbf{N};$

д)  $\Gamma: z(t) = e^{it}, t \in [0;2\pi]; f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$

8. Найти площади образов областей  $D$  при указанных отображениях:

а)  $D = \left\{ z \in \mathbf{C}: 2 < |z| < 3, \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}; f(z) = z^2;$

б)  $D = \{z \in \mathbf{C}: 0 < \operatorname{Re} z < 1, |\operatorname{Im} z| < \pi\}; f(z) = e^z;$

в)  $D$  – квадрат с вершинами в точках  $0, 1, i+1, i; f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$

9. Найти целую линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами  $(-1;0); (-4;-1); (-4;1)$  на треугольник с вершинами  $(3;0); (5;-6); (1;-6).$

10. Доказать, что линии уровня модуля дробно-линейной функции являются обобщёнными окружностями.

11. Доказать, что линии уровня действительной части дробно-линейной функции являются обобщёнными окружностями.

12. Доказать, что образом обобщённой окружности при дробно-линейной функции является обобщённая окружность.

13. Расширенная комплексная плоскость  $\bar{\mathbf{C}}$  окружностями  $|z|=1, |z-i|=1$  разбивается на четыре двуугольника. Выяснить, во что преобразуются данные области при отображении  $w = \left( z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) / \left( z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right).$

### Контрольная работа №3

1. Опираясь на теорему Тейлора, доказать формулы:

а)  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbf{C};$  б)  $\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbf{C}.$

1. Опираясь на разложение  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbf{C},$  доказать формулы:

а)  $e^{az} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{az_0} \frac{(z-z_0)^n}{n!}, z \in \mathbf{C}, z_0 = \operatorname{const} \in \mathbf{C}, a = \operatorname{const} \in \mathbf{C};$

б)  $\operatorname{sh} az = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}, z \in \mathbf{C}, a = \operatorname{const} \in \mathbf{C};$

в)  $\sin^2 z;$  г)  $\sin^4 z + \cos^4 z;$  д)  $e^z \sin z.$

2. Опираясь на разложение  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n,$  справедливое при  $|z| < 1,$  доказать формулы:

$$\text{а) } \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n, \quad |z| < 1; \quad \text{б) } \frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

3. Найти разложение следующих функций в ряд Тейлора в окрестности точки  $z=0$ :

$$\text{а) } \frac{1}{(1+z)^2}; \quad \text{б) } \frac{1}{(1-z^2)^2}; \quad \text{в) } \frac{1}{(1+z^3)^2}; \quad \text{г) } \frac{1}{(1-z^6)^3}.$$

4. Доказать формулы:

$$\text{а) } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + \frac{1}{4} \ln \frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{4n+1}}{4n+1}, \quad |z| < 1;$$

$$\text{б) } \frac{1-z}{z} \ln(1-z) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}, \quad |z| < 1.$$

5. Найти множества точек  $z \in \mathbf{C}$ , в которых сходятся следующие ряды Лорана:

$$\text{а) } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|} z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{3^n+1}; \quad \text{в) } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2^{-n^3+1})^{-1} (z-a)^{2n}, \quad a = \operatorname{const} \in \mathbf{C}.$$

6. Опираясь на формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а также используя дифференцирование и интегрирование, доказать следующие формулы:

$$\text{а) } \frac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n, \quad |z| > |b|; \quad \text{б) } \frac{1}{z^2-b^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-2(n+1)} z^{2n}, \quad |z| > |b|;$$

$$\text{в) } \left( \frac{z-a}{z-b} \right)^2 = \sum_{n=-\infty}^0 (1-n)(b-a)^{-n} (z-a)^n; \quad a \neq b, \quad |z-a| > |b-a|;$$

$$\text{г) } \frac{1}{2} \ln \frac{z+a}{z-a} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2n+1} a^{-2n-1} z^{2n+1}, \quad |z| > |a|.$$

7. Следующие функции разложить в ряд Лорана по степеням  $z$  в кольце  $1 < |z| < 2$ :

$$\text{а) } \frac{1}{(z+1)(z-2)}; \quad \text{б) } \frac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}; \quad \text{в) } \frac{z}{(z^2+1)(z+2)};$$

$$\text{г) } \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}; \quad \text{д) } \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}; \quad \text{е) } \frac{1}{(z^2-1)^2(z^4+4)}.$$

8. Следующие функции разложить в ряды Тейлора или Лорана по степеням

$$z-1 \text{ и } z+3i: \quad \text{а) } \frac{1}{z(z-3)^2}; \quad \text{б) } \frac{1}{(z^2-9)z^2}.$$

9. Разложить функцию  $f(z)$  в ряд Лорана по степеням  $z-a$  в кольце  $D$ :

$$\text{а) } z^3 e^{\frac{1}{z}}, \quad a=0, \quad D: 0 < |z| < \infty; \quad \text{б) } z^2 \sin\left(\pi \frac{z+1}{z}\right), \quad a=0, \quad D: 0 < |z| < \infty;$$

в)  $z^3 \cos \frac{1}{z-2}$ ,  $a=2$ ,  $D: 0 < |z-2| < \infty$ ;

г)  $\frac{e^z}{z(1-z)}$ ,  $a=0$ ,  $D: 0 < |z| < 1$ ; д)  $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z(1+z)}$ ,  $a=1$ ,  $D: 1 < |z-1| < 2$ .

10. Найти вычеты следующих функций во всех их изолированных особых точках:

а)  $\frac{\sin z}{z^2}$ ; б)  $e^{\frac{1}{z}}$ ; в)  $\frac{e^z}{(z-1)^2}$ ; г)  $z^2 \sin \frac{\pi}{z}$ ;

д)  $\frac{\cos z}{z - \pi/4}$ ; е)  $z e^{\frac{1}{z-1}}$ ; ж)  $z^n e^{\frac{a}{z}}$ ; з)  $\frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$ ;

и)  $\frac{1}{z^6(z-2)}$ ; к)  $\frac{1+z^8}{z^6(z+2)}$ ; л)  $\frac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}$ ;

м)  $\frac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)}$ ,  $a \neq 0$ ,  $n=1,2,\dots$ ; н)  $\sin z \sin \frac{1}{z}$ ;

о)  $\frac{\cos z}{(z^2+1)^2}$ ; п)  $\frac{1+z^8}{z^4(z^4+1)} \cos z \operatorname{ch} z$ ; р)  $\frac{\sin z}{(z^2+1)^2}$ .

11. Найти вычеты следующих функций во всех их конечных и.о.т.:

а)  $\frac{1}{z+z^3}$ ; б)  $\frac{z^2}{1+z^4}$ ; в)  $\frac{z^2}{(1+z)^3}$ ; г)  $\frac{1}{(z^2+1)^3}$ ;

д)  $\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$ ; е)  $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$ ,  $n=1,2,\dots$ ; ж)  $\frac{1}{\sin \pi z}$ ;

з)  $\operatorname{ctg} \pi z$ ; и)  $\operatorname{th} z$ ; к)  $\operatorname{cth}^2 \pi z$ ; л)  $\frac{\cos z}{(z-1)^2}$ ;

м)  $\frac{1}{e^z+1}$ ; н)  $\frac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$ ; о)  $\frac{1}{\sin z^2}$ .

12. Найти вычеты следующих функций в бесконечности:

а)  $\frac{z^4+1}{z^6-1}$ ; б)  $\cos\left(\pi \frac{z+2}{2z}\right)$ ; в)  $\frac{\sin \frac{1}{z}}{z-1}$ ;

г)  $\frac{\cos^2 \frac{\pi}{z}}{z+1}$ ; д)  $\frac{(z^{10}+1)\cos \frac{1}{z}}{(z^5+2)(z^6-1)}$ ; е)  $z \cos^2 \frac{\pi}{2}$ .

15. Вычислить интегралы:

- а)  $\int_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4}$ ,  $D: |z-1| < 1$ ;      б)  $\int_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$ ,  $D: |z-1-i| < 2$ ;
- в)  $\int_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz$ ,  $D: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{2}{3}}$ ;      г)  $\int_{\partial D} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$ ,  $D: 2 < |z| < 4$ ;
- д)  $\int_{\partial D} \frac{z}{z^3+3} e^{\frac{1}{3z}} dz$ ,  $D: |z| > 4$ ;      е)  $\int_{\partial D} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$ ,  $D: |z| < 2$ ;
- ж)  $\int_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2 \frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)} dz$ ,  $D: |z| < 3$ ;      з)  $\int_{\partial D} \frac{z^3}{z^4-1} dz$ ,  $D: |z| < 2$ ;
- и)  $\int_{\partial D} \frac{z^3}{z^2+1} e^z dz$ ,  $D: |z| < 2$ ;      к)  $\int_{\partial D} \sin \frac{z}{z+1} dz$ ,  $D: |z| > 3$ ;
- л)  $\int_{\partial D} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz$ ,  $D: |z| < 2$ ;      м)  $\int_{\partial D} \sin \frac{1}{z-1} dz$ ,  $D: |z-1| > 1$ ;
- н)  $\int_{\partial D} e^{\frac{1}{1-z}} \frac{dz}{z}$ ,  $D: |z-2| + |z+2| < 6$ ;      о)  $\int_{\partial D} z \cos \frac{z}{z+1} dz$ ,  $D: |z| < 2$ ;
- п)  $\int_{\partial D} \frac{\sin z dz}{(z^3-z)(z-i)}$ ,  $D: |z-1| < 1$ ;      р)  $\int_{\partial D} \frac{\operatorname{ctg} z}{z} dz$ ,  $D: |z-1| > 1$ ;
- с)  $\int_{\partial D} \frac{e^{\pi i}}{2z^2-i} dz$ ,  $D: |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$ ;
- т)  $\int_{\partial D} \frac{z dz}{e^{z^2}-1}$ ,  $D: |z| > 4$ ;      у)  $\int_{\partial D} \frac{z^3 dz}{e^{z^2}-1}$ ,  $D: |z| < 4$ ;
- ф)  $\int_{\partial D} \frac{z^2 dz}{e^{2\pi i z^3}-1}$ ,  $D: \sqrt[3]{n+\frac{1}{2}}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ).

### Контрольная работа №6

1. Вычислить определённые интегралы:

- а)  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{1-2a \cos \varphi + a^2}$ ,  $-1 < a < 1, n \in \mathbf{N}$ ;
- б)  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\varphi d\varphi}{1-2a \cos \varphi + a^2}$ ,  $-1 < a < 1, n \in \mathbf{N}$ ;
- в)  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+2 \cos \varphi)^n \cos n\varphi}{5+4 \cos \varphi} d\varphi, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ .

2. Вычислить несобственные интегралы и главные значения интегралов (задачи на применение леммы Жордана):

а)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}$ ;    б)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 2x + 10}$ ;    в) *v.p.*  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px dx}{1 + x^3}$ ,  $p \in \mathbf{R}$ .

3. Вычислить несобственные интегралы и главные значения интегралов от рациональных функций:

а)  $\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{(ax^2 + b)^4}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ;    б)  $\int_0^{\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4 + a^2)^2}$ ,  $a > 0$ ;    в) *v.p.*  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}$ .

## 2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

Планируемый образовательный результат (компетенция, индикатор)	Типовые контрольные задания	Критерии оценивания и шкала оценивания
<p>ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности</p> <p><i>ОПК-1.1 Осуществляет отбор теоретического и практического материала</i></p> <p><i>ОПК-1.2 Решает типовые задачи в рамках профессиональной деятельности</i></p> <p><i>ОПК-1.3 Использует различные методы и приемы решения задач профессиональной деятельности</i></p>	<p>1. Расскажите о вычислении интегралов по границе области при помощи вычетов. Вычислите интеграл.</p> <p>2. Расскажите о приложении вычетов к вычислению интегралов от вещественных функций, в частности, к вычислению несобственных интегралов. Найдите интеграл</p> <p>3. Докажите теорему об интегралах от рациональных функций.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Имеется полный анализ задачи, предложен верный алгоритм решения задачи, выделены основные этапы и теоретические основы решения, приведено полное верное решение задачи, включающее правильный ответ</i> – 18 – 20 баллов</li> <li>• <i>Имеется полный анализ задачи, предложен верный алгоритм решения задачи и оценка основных этапов решения, приведено решение задачи, но получен неправильный ответ из-за арифметической / решение недостаточно обосновано / в решении имеются лишние или неверные записи, не отделенные от решения</i> – 12 – 17 балла</li> <li>• <i>Неполный анализ задачи, предложен верный алгоритм решения задачи, но имеется верное решение лишь части задачи из-за логической ошибки</i> – 6 - 11 баллов</li> <li>• <i>Не соответствует требованиям, изложенным выше</i> – 0 - 5 баллов</li> </ul>



## V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1) Рекомендуемая литература

#### а) Основная литература:

1. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 16-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-9392-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/193364>

2. Панкратов, Е. Л. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебно-методическое пособие / Е. Л. Панкратов. — Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2020. — 12 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/191780>

#### б) Дополнительная литература:

1. Половинкин, Е. С. Теория функций комплексного переменного : учебник / Е. С. Половинкин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 253 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/1845987. - ISBN 978-5-16-017359-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1913992>

### 2) Программное обеспечение

Google Chrome	бесплатное ПО
Яндекс Браузер	бесплатное ПО
Kaspersky Endpoint Security 10	акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE	бесплатное ПО
ОС Linux Ubuntu	бесплатное ПО

### 3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

№ п/п	Вид информационного ресурса, наименование информационного ресурса	Адрес (URL)
1	ЭБС «ZNIANIUM.COM»	<a href="https://znanium.com/">https://znanium.com/</a>
2	ЭБС «ЮРАИТ»	<a href="https://urait.ru/">https://urait.ru/</a>
3	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»	<a href="https://biblioclub.ru/">https://biblioclub.ru/</a>
4	ЭБС IPR SMART	<a href="http://www.iprbookshop.ru/">http://www.iprbookshop.ru/</a>

5	ЭБС «ЛАНЬ»	<a href="http://e.lanbook.com">http://e.lanbook.com</a>
6	ЭБС ТвГУ	<a href="http://megapro.tversu.ru/megapro/Web">http://megapro.tversu.ru/megapro/Web</a>
7	Репозитарий ТвГУ	<a href="http://eprints.tversu.ru">http://eprints.tversu.ru</a>
8	Ресурсы издательства Springer Nature	<a href="http://link.springer.com/">http://link.springer.com/</a>
9	СПС КонсультантПлюс (в сети ТвГУ)	

## **VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

### **Типовые вопросы и задачи для проверки самостоятельной работы**

1. Дать определение модуля, аргумента комплексного числа.
2. Дать определение алгебраического корня из комплексного числа
3. Дать определение открытого и замкнутого множеств, предельных и граничных точек, границы, замыкания, связности множества, области, компакта, континуума.
4. Дать определение непрерывности ф.к.п. в евклидовой и сферической метриках.
5. Дать определение моногенной и голоморфной функции.
6. Сформулировать условия Коши-Римана в действительной и комплексной формах.
7. Сформулировать геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.
8. Сформулировать теорему Римана о конформных отображениях, основные принципы конформных отображений.
9. Сформулировать интегральную теорему Коши-Гурса.
10. Сформулировать интегральную формулу Коши.
11. Сформулировать теорему Морера.
12. Привести формулы Коши для производных голоморфной функции.
13. Сформулировать теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
14. Сформулировать теорему Абеля о степенных рядах.
15. Сформулировать теорему о представлении голоморфной функции степенным рядом.
16. Привести разложения основных элементарных функций в ряды Тейлора.
17. Сформулировать теорему Лиувилля.

18. Сформулировать теорему Лорана.
19. Привести неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
20. Сформулировать внутреннюю теорему единственности.
21. Дать определение изолированной особой точки голоморфной функции, привести их классификацию.
22. Сформулировать критерии у.о.т. и полюса.
23. Сформулировать критерий с.о.т.
24. Дать определение вычета в и.о.т. и привести формулы для вычисления вычетов.
25. Сформулировать теорему Коши о вычетах.
26. Сформулировать теорему о сумме всех вычетов.

### **Вопросы к экзамену**

1. Поле комплексных чисел. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представления комплексного числа. Геометрические свойства комплексных чисел.
2. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость. Сходящиеся последовательности в  $\mathbb{C}$  и  $\bar{\mathbb{C}}$ . Лемма о покоординатной сходимости. Критерий Коши, теорема Больцано-Вейерштрасса.
3. Евклидова и сферическая метрики. Топологии в  $\mathbb{C}$  и  $\bar{\mathbb{C}}$  (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, дополнение к множеству, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).
4. Функции комплексного переменного (ф.к.п.). Непрерывность, ограниченность ф.к.п. Теоремы о непрерывных ф.к.п. на компакте, в области.
5. Моногенные и голоморфные функции (определения, примеры). Условия Коши-Римана в действительной и комплексной формах. Критерии моногенности и голоморфности ф.к.п. в точке. Связь голоморфных и гармонических функций.

6. Аффинные преобразования. Целые линейные преобразования. Декомпозиция целой линейной функции, её свойства.
7. Касательное отображение. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Определения конформного отображения 1-го и 2-го рода. Якобиан конформного отображения. Примеры.
8. Криволинейные интегралы от ф.к.п., их свойства, вычисление. Примеры вычисления интегралов от ф.к.п.
9. Интегральная теорема Коши-Гурса и её обобщение на многосвязные области (с доказательствами).
10. Интегральная формула Коши. Доказательство, обобщение на случай многосвязных областей, следствия.
11. Неопределённый интеграл от ф.к.п. в плоской области и формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.
12. Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных.
13. Поточечная, равномерная, локально-равномерная сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. Примеры. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование функциональных рядов. Теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
14. Теорема Абеля о степенных рядах. Существование радиуса сходимости и методы его вычисления. Формула Коши-Адамара. Локально-равномерная сходимость, почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов.
15. Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Голоморфность суммы степенного ряда. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.

16. Теорема Лиувилля. Доказательство с её помощью теоремы Гаусса о существовании комплексного корня у любого многочлена, отличного от константы.
17. Ряды Лорана, структура области сходимости. Доказательство теоремы Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
18. Внутренняя теорема единственности (доказательство). Нули голоморфных функций. Факторизация голоморфной функции в окрестности её нуля.
19. Изолированные особые точки голоморфной функции, их классификация. Критерии у.о.т. и полюса. Нахождение порядка полюса. Примеры.
20. Критерий с.о.т. Бесконечность как и.о.т. голоморфной функции. Классификация и критерии и.о.т. на бесконечности.
21. Определение вычета в и.о.т. и формулы для вычисления вычетов. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вычета на бесконечности. Теорема о сумме всех вычетов.
22. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций. Лемма Жордана и её применения.

### **Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Организуя свою учебную работу, студенты должны:

*Во-первых*, выявить рекомендуемый режим и характер учебной работы по изучению теоретического курса, практическому применению изученного материала, по выполнению заданий для самостоятельной работы, по использованию информационных технологий и т.д.

*Во-вторых*, ознакомиться с указанным в методическом материале по дисциплине перечнем учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям и выполнения самостоятельной работы, а также с методическими материалами на бумажных и/или электронных носителях, выпущенных кафедрой своими силами и предоставляемые студентам во время занятий.

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом должна соответствовать более глубокому усвоению изучаемого курса, формировать навыки исследовательской работы и ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике.

**1. Работа с учебными пособиями.** Для полноценного усвоения курса студент должен, прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины. Необходимо усвоить определения и понятия, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этому определению. Кроме того, необходимо знать круг фактов, связанных с данным понятием. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

**2. Самостоятельное изучение тем.** Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту и экзамену.

**3. Подготовка к практическим занятиям.** При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется следовать методическим рекомендациям по работе с учебными пособиями, приведенным выше.

**4. Составление глоссария.** В глоссарий должны быть включены основные понятия, которые студенты изучают в ходе самостоятельной работы. Для полноты исследования рекомендуется вписывать в глоссарий и те термины, которые студентам будут раскрыты в ходе лекционных занятий.

**5. Составление конспектов.** В конспекте отражены основные понятия темы. Для наглядности и удобства запоминания использованы схемы и таблицы.

**6. Подготовка к экзамену.** При подготовке к экзамену студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе занятий.

Качество усвоения студентом каждой дисциплины оценивается по 100-балльной шкале.

Интегральная рейтинговая оценка (балл) по каждому (периоду обучения) складывается из оценки текущей работы студентов на семинарских, практических и лабораторных занятиях, выполнения индивидуальных творческих заданий и др. и оценки за выполнение студентом учебного задания при рейтинговом контроле успеваемости. При этом доля баллов, выделенных на рейтинговый контроль не должна превышать 50% общей суммы баллов данного модуля (периода обучения).

Сумма рейтинговых баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60 (30 баллов – 1-й модуль и 30 баллов – 2-й модуль).

Студенту, набравшему 40—54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в экзаменационной ведомости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Студенту, набравшему 55-60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе экзаменационной ведомости «Премияльные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо». В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается. Оценку «отлично» студент может получить только на экзамене.

Студент, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен. При наличии подтверждённых документально уважительных причин, по которым были пропущены занятия (длительная болезнь, обучение в другом вузе в рамках студенческой мобильности и др.), студент имеет право отработать пропущенные занятия и получить дополнительные баллы в рамках установленных баллов за модуль.

Согласно подходам балльно-рейтинговой системы в рамках оценки знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности дисциплины установлены следующие аспекты:

- Содержание учебной дисциплины в рамках одного семестра делится на два модуля (периода обучения). По окончании модуля (периода обучения) осуществляется рейтинговый контроль успеваемости знаний студентов.

- Сроки проведения рейтингового контроля:

*осенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса;

*весенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

## **VII. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

<b>Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы</b>	<b>Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы</b>	<b>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</b>
<p>Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, учебная аудитория: № 224 (170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)</p>	<p><i>Комплект учебной мебели, проектор, настенный проектор, экран, рециркулятор.</i></p>	<p>Google Chrome – бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022 Lazarus – бесплатно OpenOffice – бесплатно Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО – бесплатно ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО – бесплатно</p>



<p>Лаборатория компьютерной безопасности кафедры компьютерной безопасности и математических методов управления: № 203а (170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)</p>	<p>Комплект учебной мебели, источник бесперебойного питания 5 шт., коммутатор, компьютер (системный блок, монитор, клавиатура, мышь) 7 шт., копир-принтер-сканер 2 шт., плеер combo, телевизор, экран настенный, учебный лабораторный стенд для изучения основ криптографии, исполнение блочное BCRYPTO, учебно-лабораторный стенд для изучения блочного кодирования ЗИ-БК.</p>	<p>Google Chrome – бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022 Lazarus – бесплатно OpenOffice – бесплатно Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО – бесплатно ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО – бесплатно</p>
--	---	---

### VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№ п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Дата и № протокола заседания кафедры / методического совета факультета, утвердившего изменения
1.	V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	1) Рекомендуемая литература – актуализация списка	Решение научно-методического совета математического факультета (протокол №1 от 20.09.2022 г.)
2.	V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	1) Рекомендуемая литература – актуализация списка	Решение научно-методического совета математического факультета (протокол №1 от 19.09.2023 г.)