

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич
Должность: врио ректора
Дата подписания: 26.10.2023 15:40:58
Уникальный программный ключ:
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:

Руководитель ООП

С.М. Дудаков

2023 г.



Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки

15.03.06 МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИКА

Профиль подготовки

Интеллектуальное управление в мехатронных и робототехнических
системах

Для студентов 3-го курса

Формы обучения - очная

Составитель: к.ф. м.н. Василенко С.И.

Тверь, 2023

I. Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины

Цель освоения дисциплины: дать студентам систематические знания по методам комплексного анализа и научить их применять эти знания к решению задач математического моделирования и теории управления.

Задачами освоения дисциплины являются:

- приобретение студентами знаний основных понятий и методов теории функций комплексного переменного.
- приобретение студентами навыков решения типовых задач комплексного анализа.
- приобретение студентами знаний об основных сферах применения комплексного анализа в математическом моделировании и теории управления.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Данная дисциплина относится к разделу «Математический» обязательной части Блока 1.

Для изучения этой дисциплины необходимы базовые знания, полученные в результате изучения курсов математического анализа, алгебры, дифференциальных уравнений.

Знания, полученные при изучении комплексного анализа, могут быть использованы при изучении дисциплины «Численные методы», при выполнении научно-исследовательской работы.

3. Объем дисциплины: 3 зачетных единицы, 108 академических часов, в том числе:

контактная аудиторная работа: лекции 30 часа, практические занятия 30 часов;

контактная внеаудиторная работа: контроль самостоятельной работы ___ 0 ___, в том числе курсовая работа ___ 0 ___;

самостоятельная работа: 48 часов, в том числе контроль 0 часов.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

| Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции) | Планируемые результаты обучения по дисциплине |
|---|--|
| <p>ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности</p> <p>ПК-1 Способен участвовать в качестве исполнителя в научно-исследовательских разработках новых робототехнических и мехатронных систем</p> | <p>ОПК-1.1 Демонстрирует знания основ математики, физики, вычислительной техники и программирования</p> <p>ОПК-1.2 Демонстрирует навыки использования знаний физики и математики для решения задач теоретического и прикладного характера</p> <p>ОПК-1.3 Применяет методы математического и компьютерного моделирования, средства автоматизированного проектирования в теоретических и расчетно-экспериментальных исследованиях</p> <p>ПК-1.1 Разрабатывает математические модели мехатронных и робототехнических систем, их подсистем и отдельных элементов и модулей</p> |

5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения: зачет, 5 семестр.

6. Язык преподавания русский.

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

| Учебная программа – наименование разделов и тем | Всего (час.) | Контактная работа (час.) | | | | Контроль самостоя тельной работы (в том числе курсовая работа) | Самостояте льная работа, в том числе Контроль (час.) |
|--|-----------------|--------------------------|-----------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|--|---|
| | | Лекции | | Практическ ие занятия | | | |
| | | всего | в т.ч. практическая подготовка | всего | в т.ч. практическая подготовка | | |
| 1. Алгебра комплексных чисел и применение комплексных чисел для решения физических задач. | 20 | 6 | | 6 | | – | 8 |
| 2. Дифференцирование и интегрирование регулярных функций комплексного переменного | 22 | 6 | | 8 | | – | 8 |
| 3. Ряды Тейлора и Лорана. | 20 | 6 | | 6 | | – | 8 |
| 4. Теория вычетов | 18 | 6 | | 6 | | – | 6 |
| 5. Конформные изображения | 12 | 2 | | 2 | | – | 8 |
| 6. Операционное исчисление | 16 | 4 | | 2 | | – | 10 |
| ИТОГО | 108 | 30 | | 30 | | – | 48 |

III. Образовательные технологии

| Учебная программа – наименование разделов и тем (в строгом соответствии с разделом II РПД) | Вид занятия | Образовательные технологии |
|--|---------------------------------|--|
| 1. Алгебра комплексных чисел и применение комплексных чисел для решения физических задач. | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач |
| 2. Дифференцирование и интегрирование регулярных функций комплексного переменного | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач |
| 3. Ряды Тейлора и Лорана. | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач |
| 4. Теория вычетов | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач |
| 5. Конформные изображения | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач |

| | | |
|----------------------------|------------------------------|---|
| 6. Операционное исчисление | Лекции, практические занятия | 1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач |
|----------------------------|------------------------------|---|

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, практических занятий и самостоятельной работы студентов. В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций: традиционные лекции, практические занятия в диалоговом режиме. Дисциплина предусматривает выполнение контрольных работ, собеседование по теоретическим вопросам.

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

Для проведения текущей и промежуточной аттестации:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ОПК-1.1 Знает основные положения и концепции математических и естественных наук

1. Пояснить применение аналитических функций комплексного переменного к моделированию фильтров.
2. Объяснить явление физического резонанса.
3. Построить схему алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Способ проведения – устный.

Критерии оценивания:

Пояснение дано полно и правильно – 3 балла.

Пояснение дано с незначительными погрешностями – 2 балла.

Пояснение дано с существенными неточностями – 1 балл.

Пояснение не дано – 0 баллов.

ОПК-1.2 Решает типовые математические и естественнонаучные задачи

1. Используя теорему о вычетах, вычислить $\int_c \frac{e^z}{z^2(z-9)} dz$ по контуру $c = \{z | |z| = 4\}$.

2. Используя метод неопределенных коэффициентов и формулу суммы геометрической прогрессии, разложить функцию $f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}$ в ряд Лорана в области $1 < |z| < 2$.

3. Используя аппарат комплексного анализа, вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Задача решена правильно с помощью аппарата комплексного анализа – 5 балла.

Задача решена с незначительными погрешностями – 4 балла.

Задача решена с существенными неточностями – 3 балл.

Задача не решена или не применен аппарат комплексного анализа – 0 баллов.

ОПК-1.3 Работает со стандартными математическими моделями при решении профессиональных задач

1. Используя операционное исчисление, решить задачу Коши для дифференциального уравнения $x''(t) + x(t) = 0$ с начальными условиями $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

2. Найти оригинал заданного изображения $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}$

3. Используя условия Коши-Римана, найти аналитическую функцию комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ по заданной действительной части $u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$.

4. Найти изображение по Лапласу функции $f(t) = \sin^2 t$.

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Метод применен правильно – 5 балла.

Метод применен с незначительными погрешностями – 4 балла.

Метод применен с существенными неточностями – 3 балл.

Метод не применен – 0 баллов.

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

Основная

1. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2015. — 448 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67463

2. Карасев, И.П. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / И.П. Карасев. - М.: Физматлит, 2008. - 215 с. - ISBN 978-5-9221-0960-4; [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68139>

Дополнительная

1. Теория функций комплексного переменного: учебник / Е.С. Половинкин. — М.: ИНФРА-М, 2018. — 254 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — www.dx.doi.org/10.12737/6014. Режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=945532>

2. Асташова, И.В. Функциональный анализ: учебно-методический комплекс / И.В. Асташова, В.А. Никишкин. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва: Евразийский открытый институт, 2011. - 110 с. - ISBN 978-5-374-00486-1; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90883>

2) Программное обеспечение

| Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 46 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35) | |
|--|---|
| Adobe Acrobat Reader DC - Russian | бесплатно |
| Apache Tomcat 8.0.27 | бесплатно |
| Cadence SPB/OrCAD 16.6 | Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009 |
| GlassFish Server Open Source Edition 4.1.1 | бесплатно |
| Google Chrome | бесплатно |

| | |
|---|---|
| Java SE Development Kit 8 Update 45 (64-bit) | бесплатно |
| JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3 | бесплатно |
| JetBrains PyCharm Edu 3.0 | бесплатно |
| Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows | Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022 |
| Lazarus 1.4.0 | бесплатно |
| Mathcad 15 M010 | Акт предоставления прав IC00000027 от 16.09.2011 |
| MATLAB R2012b | Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012 |
| Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО | бесплатно |
| ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО | бесплатно |
| МиКTeX 2.9 | бесплатно |
| MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK | бесплатно |
| NetBeans IDE 8.0.2 | бесплатно |
| NetBeans IDE 8.2 | бесплатно |
| Notepad++ | бесплатно |
| Oracle VM VirtualBox 5.0.2 | бесплатно |
| Origin 8.1 Sr2 | договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд» |
| Python 3.1 pygame-1.9.1 | бесплатно |
| Python 3.4 numpy-1.9.2 | бесплатно |
| Python 3.4.3 | бесплатно |
| Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64-bit) | бесплатно |
| WCF RIA Services V1.0 SP2 | бесплатно |
| WinDjView 2.1 | бесплатно |
| R Studio | бесплатно |
| Anaconda3 2019.07 (Python 3.7.3 64-bit) | бесплатно |

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ЭБС «ZNANIUM.COM» www.znanium.com;
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/>;
3. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>.

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Интернет-университет <http://www.intuit.ru>

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Вопросы к зачету

1. Понятие о комплексных числах. Операции над комплексными числами.
2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Геометрический смысл возведения комплексного числа в степень и извлечения корня.
3. Понятие функции комплексного переменного. Непрерывность, дифференцируемость и аналитичность. Условия Коши-Римана.
4. Элементарные функции комплексного переменного.
5. Физические приложения функций комплексного переменного.
6. Интегрирование функций комплексного переменного. Теорема Коши.
7. Теорема об аналитичности интеграла от функции комплексного переменного. Теорема о первообразных.
8. Интегрирование функций комплексного переменного в многосвязных областях.
9. Формула Коши и теорема о среднем.
10. Принцип максимума и лемма Шварца.
11. Понятие о равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся последовательностей непрерывных функций.
12. Высшие производные аналитических функций. Неравенства Коши.
13. Ряды Тейлора аналитических функций.
14. Степенные ряды. Теорема об аналитичности суммы степенного ряда. Теорема о дифференцировании рядов. Теорема Абеля. Радиус сходимости ряда.
15. Нули аналитических функций. Теорема единственности.
16. Ряды Лорана.
17. Особые точки аналитических функций.

18. Понятие вычета. Вычисление интегралов с использованием вычетов.
19. Логарифмический вычет. Теорема о логарифмической производной. Принцип аргумента.
20. Понятие бесконечно удаленной точки. Вычет функции в этой точке.
21. Операционный метод. Преобразование Лапласа. Обратное преобразование.
22. Свойства преобразования Лапласа.
23. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных и интегральных уравнений.
24. Применение преобразования Лапласа к расчету электрических контуров.
25. Понятие конформного отображения.

Примерные задачи для зачета

1. $\arcsin(i) = x + iy$, $x = ?$ $y = ?$
2. $|z - 1| + |z + 1| = 3$. Найти геометрическое место точек.
3. Исследовать дифференциал функции $f(z) = |z|$ в $(.) z=0$.
4. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$. Найти $f(z)$, дифференцируемую в $\forall (.) z$.
5. Исследовать дифференциал функции $f(z) = z^n$.
6. Найти разложение $f(z) = \frac{z^3}{(z^2 - 4)^2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -z$.
7. Вычислить $\int_c \frac{e^z}{z^2(z-9)} dz$ по контуру $c = \{|z| = 4\}$
8. Вычислить $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.
9. Найти вычет в точке $z = \infty$, $f(z) = z \cdot \cos \frac{\pi}{z}$.
10. Вычислить $\arcsin(1+i) = x + iy$.

11. Вычислить $\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left(\frac{1+2\cos\varphi}{5+4\cos\varphi} \right)$

12. Вычислить $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \alpha x}{(x^2 + a^2)^2} \cdot$

Требования к рейтинг-контролю.

Расчет баллов за семестр в целом

1. Посещение лекций – 14 баллов (по 1 баллу за занятие)
2. Посещение практических занятий – 16 баллов (по 1 баллу за занятие).
3. Решение задач у доски на практических занятиях – 30 баллов (по 3 балла за задачу, решенную у доски, но не более 15 баллов за каждый модуль).
4. Контрольные работы – 20 баллов (2 контрольные работы).
5. Собеседование по теоретическим вопросам – 20 баллов.

Распределение баллов по модулям

Модуль 1. Темы – «Алгебра комплексных чисел», «Дифференцирование и интегрирование аналитических функций», «Ряды Лорана».

1. Посещение лекций – 6 баллов;
2. Посещение практических занятий – 8 баллов;
3. Решение задач на практических занятиях – 15 баллов;
4. Контрольная работа – 10 баллов.

Всего 39 баллов.

Модуль 2. Темы – «Теория вычетов», «Конформные отображения», «Операционное исчисление».

1. Посещение лекций – 8 баллов;
2. Посещение практических занятий – 8 баллов;
3. Решение задач на практических занятиях – 15 баллов;
4. Контрольная работа – 10 баллов;
5. Собеседование по теоретическим вопросам – 20 баллов.

Всего 61 балл.

Важной составляющей данного раздела РПД являются требования к рейтинг-контролю с указанием баллов, распределенных между модулями и видами работы обучающихся.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся зачетом, по итогам семестра составляет 100 баллов (50 баллов - 1-й модуль и 50 баллов - 2-й модуль).

Студенту, набравшему 40 баллов и выше по итогам работы в семестре, в экзаменационной ведомости и зачетной книжке выставляется оценка «зачтено». Студент, набравший до 39 баллов включительно, сдает зачет.

Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

Примеры решений типовых задач

Задача 1. разложить функцию $f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ в области $1 < |z| < 2$.

Решение. Методом неопределенных коэффициентов устанавливаем, что

$$\frac{1}{(1-z)(z+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+2} \right).$$

1. Рассмотрим $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$ для $|z| > 1$ имеем

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-1/z} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Пояснение. Дробь $\frac{1}{1-1/z}$ представляет сумму геометрической

прогрессии, имеющей показатель $q = \frac{1}{z}$ и $|q| < 1$.

2. Рассмотрим $f_2(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-(-z/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$.

3. Объединив 1. и 2. получим окончательный результат:

$$f(z) = \frac{1}{3} (f_1(z) + f_2(z)) = -\frac{1}{3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} \right).$$

Задача 2. Функция комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ аналитическая $u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$. Найти $f(z)$.

Решение. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y.$

Используем первое условие Коши-Римана для аналитической функции:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -6xy.$$

Решив уравнение $\frac{\partial v}{\partial y} = -6xy$, имеем

$$v = -3xy^2 + g(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2 + g'(x) \quad (1)$$

Используем второе условие Коши-Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2 \quad (2)$$

Объединив (1) и (2), получим

$$-3y^2 + 3x^2 = 3y^2 + g'(x),$$

$$g'(x) = 3x^2, g(x) = 3x^3 + c,$$

$$v(x, y) = 3xy^2 + x^3 + c,$$

$$f(z) = (y^3 - 3x^2y) + i(-3xy^2 + x^3) + c = z^3 + c, (z = x + iy)$$

Задача 3. Найти главную часть ряда Лорана $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ в окрестности точки

$$z_0 = i.$$

Решение. Представим $f(z) = \frac{1}{z-i} g(z)$, где $g(z) = \frac{1}{z+i}$ аналитическая в окрестности $z_0 = i$ функция и может быть разложена в ряд Тейлора:

$$g(z) = \frac{1}{2i + (z-1)} = \frac{1}{2i} + \frac{1}{4}(z-i) + \dots$$

Отсюда главная часть ряда Лорана:

$$f_1(z) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i}.$$

Задача 4. Вычислить вычет функции $f(z) = ctg(z)$ в точках $z_k = k\pi$.

Решение. Точки $z_k = k\pi$ являются простыми полюсами для $f(z)$ и можно воспользоваться следующей формулой для простых полюсов:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

$$res_{z=z_k} f(z) = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{\cos(\pi k)}{\cos(\pi k)} = 1$$

Задача 5. вычислить интеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cdot \cos \varphi + a^2}$, $|a| < 1$.

Решение. Сделаем замену переменных $z = e^{i\varphi}$, получим:

$$I = \int_{|z|=1} \frac{idz}{az^2 - (a^2 + 1)z + a}.$$

Уравнение $az^2 - (a^2 + 1)z + a = 0$ имеет корни $z_1 = a$ и $z_2 = 1/a$, которые являются простыми полюсами подынтегральной функции. Так как $|a| < 1$, то в круге $|z| = 1$ находится только точка $z_1 = a$. По теореме о вычетах имеем:

$$I = 2\pi \cdot i \cdot res_{z=a} \frac{i}{az^2 - (a^2 + 1)z + a} = \frac{z\pi \cdot i}{a^2 - 1} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Задача 6. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция является рациональной. Для таких функций имеет место формула:

$$I = 2\pi \cdot i \sum_{\substack{k \\ z=a \\ \text{Im}z_k > 0}} \text{res}f(z), \text{ где } f(z) = \frac{z}{z^2 + 4z + 13}.$$

$f(z)$ имеет два кратных полюса (кратности 2) $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = -2 - 3i$
 $\text{Im}z_2 < 0$, поэтому имеем :

$$I = 2\pi \cdot i \sum_{\substack{k \\ z=z_1}} \text{res}f(z) = \frac{2\pi i}{i} \frac{4}{6^3} = \frac{\pi}{27}.$$

VII. Материально-техническое обеспечение

Для аудиторной работы.

| | |
|--|---|
| Учебная аудитория № 7 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35) | Набор учебной мебели, экран, проектор. |
| Учебная аудитория № 20 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35) | Набор учебной мебели, экран, проектор |

Для самостоятельной работы.

| | |
|--|---|
| Помещение для самостоятельной работы обучающихся: Компьютерный класс факультета ПМиК № 4б 170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35 | Компьютер, экран, проектор, кондиционер. |
|--|---|

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

| №п.п. | Обновленный раздел рабочей программы дисциплины | Описание внесенных изменений | Реквизиты документа, утвердившего изменения |
|-------|--|---|--|
| 1 | V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины 2) Программное обеспечение | Внесены изменения в программное обеспечение | От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета |
| | | | |