Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:

Руководитель ООП

____________С.М.Дудаков

«__» __________2023 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
Математическое моделирование

Для студентов 3 курса, 6 семестр
форма обучения – очная

Составитель:
д. ф. - м. н., профессор
Климок В.И.

Тверь, 2023

I. Аннотация

1. Цели и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины является: формирование и развитие у обучающихся общекультурных и профессиональных компетенций.

Задачами освоения дисциплины являются: способность применять математические модели и методы математического моделирования при анализе проблем в различных областях народного хозяйства на основе знаний фундаментальных математических дисциплин и компьютерных наук; способность к разработке и реализации методов компьютерного моделирования, вычислительных методов и алгоритмов при решении сложных математических задач.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к разделу "Дисциплины профиля подготовки", части, формируемой участниками образовательных отношений, элективные дисциплины 2. Блок 1.

Для изучения данной дисциплины требуются предварительные знания и умения, приобретённых при изучении математического анализа и методов вычислительной математики на предыдущих курсах, знание программирования и умения создать интерфейс, облегчающий визуализацию полученного результата в процессе математического моделирования.

Дисциплина необходима для подготовки специалистов, умеющих создать или использовать пакеты прикладных программ (если они есть) для математического моделирования природных процессов.

3. Объем дисциплины:

5 зач. единиц, **180** академических часов**, в том числе:**
контактная аудиторная работа: лабораторная работа 64 часов; в т.ч. практическая подготовка 0 часов.
контактная внеаудиторная работа контроль самостоятельной работы 10 ч., в том числе расчетно-графическая работа 10 ч.;
самостоятельная работа 106 часов, в том числе контроль 32 часа.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты	Планируемые результат обучения по дисциплине

Освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	
ПК-1 Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	ПК-1.1 Знает методы поиска информации, необходимой для проведения современных научных исследований ПК-1.2 Обрабатывает и интерпретирует данные современных научных исследований ПК-1.3 Формирует выводы по научным исследованиям на основе соответствующих данных
ПК-4 Способен использовать современные методы разработки алгоритмов и программного обеспечения для выполнения расчетов на базе математических моделей	Пк-4.1 Разрабатывает алгоритмы решения задач на базе математических моделей ПК-4.2 Разрабатывает программное обеспечение для реализации алгоритмов решения задач на базе математических моделей

5. Форма промежуточной аттестации – экзамен, РГР (6 семестр).

6. Язык преподавания русский

5. Образовательные технологии

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Самостоятельная работа, в том числе Контроль (час.)
		Лекции	Лабораторные работы		Контроль самостоятельной работы	
			всего	В т.ч. практическая подготовка		

1. Введение. Понятие о методе конечных разностей для решения уравнений в частных производных. Понятие об итерационных методах решения систем линейных алгебраических уравнений и примеры их реализаций. Простая итерация (метод Якоби, метод одновременных смещений). Метод Гаусса-Зейделя (метод последовательных смещений). Метод неполной релаксации.	45	0	16	0	0	29
2. Неявные итерационные методы. Метод прогонки для решения систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов.	45	0	16	0	0	29
3. Расчёт нестационарного одномерного процесса распространения загрязняющего вещества сточных вод. Модель популяции. Неустановившееся движение подземных вод в полубесконечном однородном пласте.	45	0	16	0	5	24

4. Стационарный двумерный процесс распространения загрязнения при сосредоточенном сбросе постоянной массы сточных вод в реку. Расчёт нестационарного одномерного процесса распространения загрязнения при периодическом сбросе сточных вод в реку. Западная интенсификация течений. Двумерная модель расчёта распространения примесей в водоёме с учётом рельефа дна и берегового очертания.	45	0	16	0	5	24
ИТОГО	**180**	**0**	**64**	**0**	**10**	**106**

III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем *(в строгом соответствии с разделом II РПД)*	Вид занятия	Образовательные технологии
Введение. Понятие о методе конечных разностей для решения уравнений в частных производных. Понятие об итерационных методах решения систем линейных алгебраических уравнений и примеры их реализаций. Простая итерация (метод Якоби, метод одновременных смещений). Метод Гаусса-Зейделя (метод последовательных смещений). Метод неполной релаксации.	Лабораторные работы	1. Изложение теоретического материала.

Неявные итерационные методы. Метод прогонки для решения систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов.	Лабораторные работы	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
Расчёт нестационарного одномерного процесса распространения загрязняющего вещества сточных вод. Модель популяции. Неустановившееся движение подземных вод в полубесконечном однородном пласте.	Лабораторные работы	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
Стационарный двумерный процесс распространения загрязнения при сосредоточенном сбросе постоянной массы сточных вод в реку. Расчёт нестационарного одномерного процесса распространения загрязнения при периодическом сбросе сточных вод в реку. Западная интенсификация течений. Двумерная модель расчёта распространения примесей в водоёме с учётом рельефа дна и берегового очертания.	Лабораторные работы	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

ПК-1 Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям

ПК-**1.1**. Знает методы поиска информации, необходимой для проведения современных научных исследований

Для системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{a_i\varphi_{i-1} - b_i\varphi_i + c_i\varphi_{i+1} = f_i}$, $\boldsymbol{i = \overline{1,n}}$, $\boldsymbol{a_1 = 0}$, $\boldsymbol{c_n = 0}$

1. написать алгоритм решения с использованием метода *одновременных* смещений.

2. написать алгоритм решения с использованием метода *последовательных* смещений.

Приведённый принцип оценки относится и к первому (**1.**), и ко второму (**2.**) заданиям.

- Формулы написаны правильно – 5 баллов.
- Имеются неточности в написании формул – минус 1-2 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

ПК-**1.2**. Обрабатывает и интерпретирует данные современных научных исследований

1. Сформулировать и реализовать алгоритм построения итераций методом *одновременных* смещений в виде вычислительной программы.

2. Сформулировать и реализовать алгоритм построения итераций методом *последовательных* смещений в виде вычислительной программы.

Приведённый принцип оценки относится и к первому (**1.**), и ко второму (**2.**) заданиям.

- Программа написана правильно – 5 баллов.
- Имеются неточности в написанной программе – минус 1-2 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

ПК-**1.3**. Формирует выводы по научным исследованиям на основе соответствующих данных

Для системы алгебраических уравнений $\boldsymbol{aw\psi_{i-1,j} - ao\psi_{i,j} + ae\psi_{i+1,j} + an\psi_{i,j-1} + as\psi_{i,j+1} = f_{i,j}}$, $\left(\boldsymbol{i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1}}\right)$, $\boldsymbol{\psi_{i,j}\big|_{\Gamma} = 0}$ написать формулы для построения итераций:

1. блочным методом *одновременных* смещений.

2. блочным методом *последовательных* смещений.

Приведённый принцип оценки относится и к первому (**1.**), и ко второму (**2.**) заданиям.

- Формулы написаны правильно – 5 баллов.
- Имеются неточности в написании формул – минус 1-2 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

ПК-4. Способен использовать современные методы разработки алгоритмов и программного обеспечения для выполнения расчетов на базе математических моделей

Пк-**4.1**. Разрабатывает алгоритмы решения задач на базе математических моделей

1. Найти аналитическое решение краевой задачи

$$\varepsilon\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\varphi}{dx}=f\ ,\ \left(0<x<1\right),\ \varphi\left(0\right)=\varphi_a\ ,\ \varphi\left(1\right)=\varphi_b \qquad (*)$$

2. Найти аналитическое решение краевой задачи

$$\varepsilon\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\varphi}{dx}=f\ ,\ \left(0<x<1\right),\ \varphi\left(0\right)=\varphi_a\ ,\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=1}=0\ . \qquad (**)$$

Приведённый принцип оценки относится и к первому (**1.**), и ко второму (**2.**) заданиям.

- Решение найдено верно – 5 баллов.
- При нахождении решения имеются неточности – 4 балла.
- Найденное решение не удовлетворяет краевым условиям – 2 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

ПК-**4.2**. Разрабатывает программное обеспечение для реализации алгоритмов решения задач на базе математических моделей

1. Краевую задачу $(*)$ аппроксимировать схемой *направленных* разностей. Решение полученной системы алгебраических уравнений $a_i\varphi_{i-1}-b_i\varphi_i+c_i\varphi_{i+1}=f_i$ с тридиагональной матрицей коэффициентов искать в виде $\varphi_i=\alpha_i\varphi_{i+1}+\beta_i$.

2. Краевую задачу $(**)$ аппроксимировать схемой *центральных* разностей. Решение полученной системы алгебраических уравнений $a_i\varphi_{i-1}-b_i\varphi_i+c_i\varphi_{i+1}=f_i$ с тридиагональной матрицей коэффициентов искать в виде $\varphi_i=\left(1-\alpha_i\right)\varphi_{i+1}+\beta_i$.

Приведённый принцип оценки относится и к первому (**1.**), и ко второму (**2.**) заданиям.

-Краевая задача заменена конечно-разностной и приведена к виду $a_i\varphi_{i-1}-b_i\varphi_i+c_i\varphi_{i+1}=f_i$.

Выписаны формулы для определения прогоночных коэффициентов α_i и β_i – 5 баллов.

-При замене дифференциальной краевой задачи конечно-разностной задачей имеются неточности – минус 1-2 балла.

- Имеются неточности при определении прогоночных коэффициентов – минус 1-2 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

а) основная литература:

1. Зауэр, Р. Введение в газовую динамику / Р. Зауэр ; перевод Г. А. Вольперт. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. — 228 с. — ISBN 978-5-4344-0767-0. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/92110.html (дата обращения: 19.10.2023).
2. Климок В.М. Математическая модель гидротермодинамики водоема и ее дискретный анализ : учебно-методическое пособие / В.И. Климок ; Твер. гос. ун-т. - Тверь : Тверской государственный университет, 2000. - 26 с. - URL: http://texts.lib.tversu.ru/texts2/00001ucheb.pdf
3. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики : учебное пособие / Г. И. Марчук. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-0892-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210302 (дата обращения: 20.10.2023).

б) дополнительная
1. Должанский, Ф. В. Основы геофизической гидродинамики / Ф. В. Должанский ; под общ. ред. Е. Б. Гледзер. – Москва : Физматлит, 2011. – 264 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457426 (дата обращения: 20.10.2023). –
2. Иванов, В. А. Основы океанологии / В. А. Иванов, К. В. Показеев, А. А. Шрейдер. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 576 с. — ISBN 978-5-507-45648-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/277064 (дата обращения: 20.10.2023).
3. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон ; ред. Б. М. Будак, А. Д. Горбунов ; пер. с англ. Б. М. Будак, А. Д. Горбунова [и др.]. – Москва : Мир, 1972. – 420 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457046 (дата обращения: 20.10.2023).
4. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1971. – 554 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457052 (дата обращения: 20.10.2023).
5. Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры : учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. — 4-е изд.,стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 736 с. — ISBN 978-5-8114-0317-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210368 (дата обращения: 20.10.2023)
6. *Кистович, А. В.* Физика моря : учебное пособие для вузов / А. В. Кистович, К. В. Показеев, Т. О. Чаплина. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 336 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12036-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/518565 (дата обращения: 20.10.2023).

2) Программное обеспечение

Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 249 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	
Cadence SPB/OrCAD 16.6	Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009
FidesysBundle 1.4.43 x64	Акт приема передачи по договору №02/12-13 от 16.12.2013
Google Chrome	бесплатно
JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus 1.4.0	бесплатно
Mathcad 15 M010	Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011
MATLAB R2012b	Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012
MiKTeX 2.9	бесплатно
NetBeans IDE 8.0.2	бесплатно
Notepad++	бесплатно
OpenOffice	бесплатно
Origin 8.1 Sr2	договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»
Python 3.4.3	бесплатно
Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64 bit)	бесплатно
R for Windows 3.3.2	бесплатно
STATGRAPHICS Centurion XVI.II	Акт приема-передачи № Tr024185 от 08.07.2010
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. **ЭБС «ZNANIUM.COM»** www.znanium.com;
2. **ЭБС «Университетская библиотека онлайн»** https://biblioclub.ru/;

3. **ЭБС «Лань»** http://e.lanbook.com.

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- Сайт поддержки учебного процесса по дисциплине: http://prog.tversu.ru
- Виртуальная образовательная среда ТвГУ (http://moodle.tversu.ru)
- Научная библиотека ТвГУ (http://library.tversu.ru)
- Сайт ТвГУ (http://university.tversu.ru)
    1. Электронно-библиотечная система IPRbooks: http://www.iprbookshop.ru
    2. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека ONLINE» http://biblioclub.ru
    3. Научная библиотека ТвГУ http://library.tversu.ru

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Важной составляющей данного раздела РПД являются требования к рейтинг-контролю с указанием баллов, распределенных между модулями и видами работы обучающихся.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60 баллов (30 баллов - 1-й модуль и 30 баллов - 2-й модуль).

Обучающемуся, набравшему 40–54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55–57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58–60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично». В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен.

Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

1. Расчетно-графическое задание должно содержать:
- введение;
- постановку задачи;
- вывод уравнения для интегральной функции тока;

• указания конечно-разностной схемы для аппроксимации уравнения в частных производных;
• используемый итерационный метод для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений;
• результаты численных экспериментов;
• распечатку программы.

2. Контрольные вопросы для проведения экзамена

Определение внутренних и граничных узлов сеточной области. Пример аппроксимации дифференциального уравнения. Определение разностной схемы (конечно-разностного аналога). Простая итерация (метод Якоби, метод одновременных смещений). Метод Гаусса-Зейделя (метод последовательных смещений). Метод неполной релаксации. Метод прогонок по линиям. Метод прогонки для решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей. Схемы реализации итерационных процессов на конкретных примерах.

Для нахождения приближённого решения краевой задачи $u'' + \alpha u' = f$, $u(0) = u(1) = 0$, где α и f постоянные, используется разностная схема $a u_{k-1} - b u_k + c u_{k+1} = f$, $b = a + c$, $u_0 = 0$, $u_n = 1$. Найти решение однородной системы алгебраических уравнений $a u_{k-1} - b u_k + c u_{k+1} = 0$. Решение искать в виде $u_k = q^k$.

Вывести формулы для определения коэффициентов метода прогонки при решении системы линейных алгебраических уравнений $a_k u_{k-1} - b_k u_k + c_k u_{k+1} = f_k$, $u_0 = u^0$, $u_n = u^n$. Решение искать в виде $u_k = \alpha_k u_{k+1} + \beta_k$.

Вывести формулы для определения коэффициентов метода прогонки при решении системы линейных алгебраических уравнений $a_k u_{k-1} - b_k u_k + c_k u_{k+1} = f_k$, $u_0 = u^0$, $u_n = u^n$. Решение искать в виде $u_k = (1 - \alpha_k) u_{k+1} + \beta_k$.

Аппроксимировать уравнение $D\dfrac{d^2P}{dx^2} - u\dfrac{dP}{dx} - \left(\dfrac{1}{\tau} + \gamma\right)P = -\dfrac{P^0}{\tau}$ и привести к виду $a_k P_{k-1} - b_k P_k + c_k P_{k+1} = f_k$.

Найти решение краевой задачи $\dfrac{dx}{dt} = ax - bx^2$, $x = x_0$ при $t = t_0$, описывающей локальную динамику популяции (закон её роста).

Найти решение краевой задачи $\dfrac{\partial h}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, $t = 0 : h = H_0$; $x = 0 : h = H_1 = const$; $x = +\infty : h = H_0 = const$, описывающей процесс осушения заболоченного массива одиночным совершенным каналом, в предположении, что уровень воды в канале мгновенно снизился с H_0 до H_1. Использовать новую переменную $y = \dfrac{x}{2\sqrt{at}}$.

Уравнение $u\frac{\partial c}{\partial x}=A\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-\gamma c$ с помощью подстановки $c(x,y)=e^{-\frac{\gamma}{u}x}\varphi(x,y)$ привести к виду $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{A}{u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$.

Уравнение $\frac{\partial c}{\partial t}=D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-u\frac{\partial c}{\partial x}-\gamma c$ подстановкой $c(x,t)=e^{\mu x+\lambda t}\varphi(x,t)$ привести к виду $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

Найти решение краевой задачи $\varepsilon\Delta\psi+\frac{\partial\psi}{\partial x}=\sin\pi y$, $\psi\big|_{\Gamma}=0$, в квадрате $[0,1;0,1]$.

Показать, что $\frac{\partial\overline{u^2 H}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{uvH}}{\partial y}=H\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overline{u^2}+\overline{v^2}}{2}\right)-\bar v\left(\frac{\partial\bar v}{\partial x}-\frac{\partial\bar u}{\partial y}\right)\right]$, при условии, что $\frac{\partial\bar uH}{\partial x}+\frac{\partial\bar vH}{\partial y}=0$.

Показать, что $\frac{\partial\overline{u\,v}H}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v^2}H}{\partial y}=H\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\overline{u^2}+\overline{v^2}}{2}\right)+\bar u\left(\frac{\partial\bar v}{\partial x}-\frac{\partial\bar u}{\partial y}\right)\right]$, при условии, что $\frac{\partial\bar uH}{\partial x}+\frac{\partial\bar vH}{\partial y}=0$.

Известно, что $\frac{\partial P_H}{\partial x}=-\frac{f}{H}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{R}{H}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\Phi^x$, $\frac{\partial P_H}{\partial y}=-\frac{f}{H}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{R}{H}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\Phi^y$. Записать условие $\int\limits_{\Gamma}dP_H=0$ в виде криволинейного интеграла первого рода.

Дано уравнение

$$\frac{\partial A\psi}{\partial t}+RA\psi=\frac{\partial\tau_y/H}{\partial x}-\frac{\partial\tau_x/H}{\partial y}$$

с условием $\psi\big|_{\Gamma}=0$. Найти выражение для производной $\frac{\partial E}{\partial t}$, где

$$E=\frac{1}{2\rho_0}\iint\limits_S\frac{1}{H}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]dS,\ A\psi=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right).$$

Вывести закон изменения кинетической энергии $\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V\frac{u^2+v^2}{2}dV$ для движения, описываемого уравнениями:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+f\,v=A\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-Ru\\ \frac{\partial v}{\partial t}-f\,u=A\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-Rv\end{cases}$$

с краевыми условиями

$$z=0:\quad A\frac{\partial u}{\partial z}=-\tau_x,\ A\frac{\partial v}{\partial z}=-\tau_y$$
$$z=H:\quad A\frac{\partial u}{\partial z}=-\tau_x^b,\ A\frac{\partial v}{\partial z}=-\tau_y^b.$$

Уравнения выполняются в области V водоёма, ограниченной цилиндрической поверхностью Γ и плоскостями $\Omega_0=\{z=0\}$ и $\Omega_H=\{z=H\}$.

Известно, что

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}=-\dfrac{f}{H}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+\dfrac{R}{H}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\dfrac{\tau^x}{H}\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{f}{H}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}-\dfrac{R}{H}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+\dfrac{\tau^y}{H}\end{cases}.$$

Найти соотношение, которому должна удовлетворять функция тока ψ на контуре острова из условия: $\int\limits_{\Gamma} dP=0$, $\psi|_{\Gamma}=const$, т. е. $\left.\dfrac{\partial\psi}{\partial l}\right|_{\Gamma}=0$, где l – направление касательной, $\vec{l}=\left[-\cos(n,y),\cos(n,x)\right]$.

3. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы и лабораторных работ

Содержание самостоятельной работы

Например, требуется:

1) аппроксимировать дифференциальное уравнение в частных производных, используя одну из предложенных разностных схем;
2) определить порядок аппроксимации;
3) написать алгоритм решения полученной системы алгебраических уравнений, используя один из предложенных итерационных методов;
4) написать программу, реализующую данный алгоритм.

Пример содержательного описания задания на примере обыкновенного дифференциального уравнения.

Краевая задача состоит в следующем. Требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y''+p(x)y'-q(x)y=f(x),\quad a\le x\le b,\quad q(x)\ge 0, \tag{1}$$

удовлетворяющего краевым условиям первого рода:

$$y(a)=\gamma_a\ ,y(b)=\gamma_b, \tag{2}$$

где $p(x),q(x),f(x)$ – заданные непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции; γ_a,γ_b – заданные числа.

При решении краевой задачи (1),(2) методом конечных разностей отрезок $[a,b]$ разбивается на n частей, вообще говоря, не обязательно равных. Точки деления отрезка на части имеют абсциссы

$x_i=x_0+\sum\limits_{l=1}^{i}(x_i-x_{i-1})\quad (i=\overline{1,n})$, причем $x_0=a, x_n=b$. Значения искомой функции $y(x)$ в точках x_i и ее производных $y'(x)$ и $y''(x)$:

$y_i = y(x_i), y'_i = y'(x_i), y''(x_i)$. Кроме того, вводятся обозначения: $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$.

Производные y'_i, y''_i заменяются с некоторой погрешностью конечно-разностными отношениями во внутренних точках x_i отрезка $[a,b]$. Например, если разбиение равномерное, т.е. $x_i = a + i \cdot h, h = (b-a)/n, i = \overline{0,n}$, то краевая задача (1),(2) может быть заменена (аппроксимирована) с погрешностью $O(h^2)$ системой алгебраических уравнений (разностной схемой)

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - q_i y_i = f_i, \quad i = \overline{1,n-1}, \quad y_0 = \gamma_a, y_n = \gamma_b \tag{3}$$

с квадратной трехдиагональной матрицей коэффициентов.

При исследовании погрешности приближенных формул численного дифференцирования выписывают выражения для остаточных членов, используя формулу Тейлора.

Например,

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} = \frac{1}{2h}[y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + O(h^3) -$$

$$y(x) + hy'(x) - \frac{h^2}{2}y''(x) + O(h^3)] = y' + O(h^2).$$

В соответствии с видом остаточного члена говорят, что (в данном случае) погрешность имеет второй порядок относительно h или аппроксимация второго порядка точности (относительно h).

Например,

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{1}{h}[y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + O(h^3) - y(x)] = y'(x) + O(h),$$

т.е. в данном случае погрешность имеет первый порядок относительно h или аппроксимация первого порядка точности.

Систему алгебраических уравнений (3) можно записать в виде

$$a_i y_{i+1} - b_i y_i + c_i y_{i-1} = -f_i, \quad i = \overline{1,n-1}, \tag{4}$$

с учетом обозначений: $a_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}$, $c_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}$, $b_i = a_i + c_i + q_i$.

Разностная схема (4) называется монотонной, если $a_i > 0, c_i > 0, b_i - a_i - c_i = d_i \geq 0$. Это название объясняется тем, что решение задачи (4) при $d_i = 0, f_i = 0, a_i > 0, c_i > 0$ является монотонной функцией на всем отрезке, т. е. либо $y_i \leq y_{i+1}$, либо $y_i \geq y_{i+1}$ для всех $i = \overline{1,n-1}$. Для монотонных разностных схем выполняется принцип максимума, который гарантирует однозначную разрешимость дискретной задачи и равномерную сходимость ее решения к точному решению.

Например, если использовать итерационный метод последовательных смещений для решения системы алгебраических уравнений (4), то итерации строятся следующим образом:

$$y_i^{(k+1)} = (a_i y_{i+1}^{(k)} + c_i y_{i-1}^{(k+1)} + f_i)/b_i, \quad i = \overline{1,n-1},$$

где k – номер итерационного шага.

Фрагмент программы, реализующей данный алгоритм, например, на алгоритмическом языке Паскаль, может иметь вид:

```
    …
    {a[i], b[i], c[i], f[i] предполагаются уже заданными}
    y[0]:= ga; y[n]:= gb;
    for i:=1 to n-1 do  y[i]:= 0;
for k:=1 to koliter do
  begin
     for i:=1 to n-1 do
        y[i]:= (a[i]*y[i+1]+c[i]*y[i-1]+ f[i])/b[i];
{проверка условия нахождения решения с удовлетворяющей точностью, если да, то выход из итерационного цикла, если нет, то итерации продолжаются}
end;{ end of k}
    …
```

Например, требуется:

1) вывести уравнение для интегральной функции тока;

2) сформулировать краевые условия для полученного уравнения;

3) выписать соотношения, которым должна удовлетворять функция тока на островах в случае неодносвязной области.

Пример содержательного описания задания на примере водоема постоянной глубины.

Уравнения Навье-Стокса, описывающие движение вязкой несжимаемой жидкости, записанные в декартовой системе координат в приближении β – плоскости и пренебрежении инерционными членами и горизонтальным турбулентным трением имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial u}{\partial z}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad (2)$$

$$-g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \text{ или } P = P^s + g\int_0^z \rho dz, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (4)$$

В качестве граничных условий поставим следующие:

На невозмущенной поверхности при $z = 0$:

$$\rho_0 A\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x,\ \rho_0 A\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y,\ w = 0; \qquad (5)$$

на дне водоема при $z = H$:

$$\rho_0 A\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b,\ \rho_0 A\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b,\ w = 0; \qquad (6)$$

на боковых границах:

интегральное условие непротекания

$$(\vec{U}\cdot\vec{n})=0, \qquad (7)$$

где $\vec{n}=[\cos(n,x),\cos(n,y)]$ – вектор внешней нормали к береговой черте Γ, а $\vec{U}$ – вектор полного потока с компонентами: $U_x=\int_0^H udz, U_y=\int_0^H vdz$.

В начальный момент времени $t=0$ будем считать, что скорость течения известна:

$$u=u^0, v=v^0.$$

Обозначения общепринятые: ось x направлена на восток, y – на юг, z – расстояние по вертикали вниз от невозмущенной поверхности водоема; $f=f_0-\beta\cdot y$ – параметр Кориолиса; P,ρ – отклонения давления и плотности от некоторого стандартного распределения по глубине; τ_x,τ_y –компоненты напряжения трения ветра; τ_x^b,τ_y^b – компоненты напряжения придонного трения; u,v,w – проекции вектора скорости на оси координат x,y,z соответственно; ρ_0 – средняя плотность воды; A – коэффициент вертикального турбулентного трения; P^s – давление на невозмущенной поверхности водоема, включающее атмосферное давление и давление, вызванное перепадами уровня воды в водоеме.

Будем считать, что составляющие придонного трения пропорциональны составляющим полного потока, т.е.

$$\tau_x^b=R\int_0^H\rho_0 udz, \tau_y^b=R\int_0^H\rho_0 vdz.$$

Проинтегрируем уравнение неразрывности (4) по переменной z от 0 до H с учетом краевых условий (5),(6) для вертикальной составляющей скорости w, в результате получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H udz+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H vdz=0. \qquad (8)$$

Интегральное уравнение неразрывности (8) будет выполняться тождественно, если ввести функцию тока ψ согласно соотношениям

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\int_0^H\rho_0 vdz, \frac{\partial\psi}{\partial y}=-\int_0^H\rho_0 udz, \qquad (9)$$

Тогда осредненные по глубине горизонтальные составляющие скорости $\bar{u}=\frac{1}{H}\int_0^H udz, \bar{v}=\frac{1}{H}\int_0^H vdz$ могут быть найдены через функцию тока по формулам

$$\bar{u}=-\frac{1}{\rho_0 H}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \bar{v}=\frac{1}{\rho_0 H}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (10)$$

Интегрируя уравнения движения (1), (2), предварительно умноженные на ρ_0, по вертикальной координате от 0 до H, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^H\rho_0 udz+f\int_0^H\rho_0 vdz=-H\frac{\partial P^b}{\partial x}+g\int_0^H z\frac{\partial\rho}{\partial x}dz+\tau_x-R\int_0^H\rho_0 udz,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^H \rho_0 v dz - f\int_0^H \rho_0 u dz = -H\frac{\partial P^b}{\partial y} + g\int_0^H z\frac{\partial \rho}{\partial y}dz + \tau_y - R\int_0^H \rho_0 v dz,$$

здесь через P^b обозначено придонное давление – $P^b = P^s + g\int_0^H \rho dz$ и учтено равенство $\int_0^H dz\int_0^z \rho d\xi = \int_0^H z\rho dz$, которое легко получается интегрированием по частям.

С учетом соотношений (9) последние два уравнения перепишем в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + f\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial HP^b}{\partial x} + g\int_0^H z\frac{\partial \rho}{\partial x}dz + \tau_x + R\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + f\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial HP^b}{\partial y} + g\int_0^H z\frac{\partial \rho}{\partial y}dz + \tau_y - R\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{11}$$

Исключим теперь из последних двух уравнений неизвестное придонное давление P^b, для чего из второго уравнения, продифференцированного по x, вычтем первое уравнение, продифференцированное по y, в результате получим уравнение для интегральной функции тока ψ

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + R\Delta\psi + \beta\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}, \tag{12}$$

здесь использовано обозначение для оператора Лапласа: $\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$.

Интегральное условие непротекания (7) физически означает, что через каждую вертикаль границы жидкости вытекает столько, сколько втекает. Математически это условие означает, что производная по направлению касательной от функции тока на границе равна нулю, т.е. функция тока на границе постоянна. Действительно, если $\vec{l}$ – вектор касательной, то $\vec{l} = [-\cos(n,y), \cos(n,x)]$ и интегральное условие непротекания (7) с учетом (10) примет вид $-\frac{\partial \psi}{\partial y}\cos(n,x) + \frac{\partial \psi}{\partial x}\cos(n,y) = 0$ на границе области. А это не что иное, как равенство нулю производной по направлению касательной, т.е. $\left.\frac{\partial \psi}{\partial l}\right|_{\Gamma} = 0$. Так как из уравнения (12) функция тока определяется с точностью до постоянной, то на границе области ее можно положить равной нулю.

Если область не односвязная (имеются острова), то функция тока должна быть постоянна на каждом граничном контуре и граничное условие может быть записано в виде

$$\psi|_{\Gamma_0} = 0, \quad \psi|_{\Gamma_i} = Q_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

где разности неизвестных контурных постоянных Q_i имеют смысл полных расходов воды в соответствующих проливах и все Q_i должны находиться в процессе решения задачи.

Постоянные Q_i нельзя найти только из одного рассмотренного уравнения (12). Однако надо иметь в виду, что мы ищем решение системы уравнений для функции тока ψ и придонного давления P^b. Если решение ψ найдено, то приходим к задаче о нахождении функции P^b по известным значениям производных $\frac{\partial P^b}{\partial x}, \frac{\partial P^b}{\partial y}$, определенным из системы уравнений (11). Уравнение (12), которому удовлетворяет функция тока, выражает условие равенства вторых смешанных производных функции P^b. Но одного этого условия для определения однозначной функции P^b недостаточно; дополнительно должны выполняться следующие равенства:

$$\int_{\Gamma_i} dP^b = 0 \quad (i = \overline{1,m}) \tag{13}$$

Подставляя в условие (13) выражения для производных от придонного давления, найденные из системы уравнений (11):

$$\frac{\partial HP^b}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - f\frac{\partial \psi}{\partial x} + g\int_0^H z\frac{\partial \rho}{\partial x}dz + \tau_x + R\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial HP^b}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - f\frac{\partial \psi}{\partial y} + g\int_0^H z\frac{\partial \rho}{\partial y}dz + \tau_y - R\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

получим

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\partial HP^b}{\partial x}dx + \frac{\partial HP^b}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial}{\partial t} + R\right)\int_{\Gamma_i} \frac{\partial \psi}{\partial y}dx - \frac{\partial \psi}{\partial x}dy - \int_{\Gamma_i} f d\psi + \int_{\Gamma_i} \Phi^x dx + \Phi^y dy = 0,$$

где $\Phi^x = g\int_0^H z\frac{\partial \rho}{\partial x}dz + \tau_x$, $\Phi^y = g\int_0^H z\frac{\partial \rho}{\partial y}dz + \tau_y$

и, так как $dy = \cos(n,x)dl, dx = -\cos(n,y)dl$, где dl – элемент дуги контура острова, то последнее равенство принимает вид

$$-\int_{\Gamma_i} f\frac{\partial \psi}{\partial l}dl - \left(\frac{\partial}{\partial t} + R\right)\int_{\Gamma_i} \frac{\partial \psi}{\partial n}dl + \int_{\Gamma_i} (\vec{\Phi}\cdot\vec{l})dl = 0.$$

Отсюда с учетом того, что производная по направлению касательной вдоль контура равна нулю, т.е. $\left.\frac{\partial \psi}{\partial l}\right|_{\Gamma_i} = 0$, и получаем условия для нахождения постоянных Q_i на островах: $\left(\frac{\partial}{\partial t} + R\right)\int_{\Gamma_i} \frac{\partial \psi}{\partial n}dl = \int_{\Gamma_i} (\vec{\Phi}\cdot\vec{l})dl$.

Последнему выражению можно придать вид

$$\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + R\right)\int_{\Gamma_i} \bar{u}dx + \bar{v}dy = \int_{\Gamma_i} \Phi^x dx + \Phi^y dy.$$

То есть, циркуляция осредненной по глубине скорости вдоль Γ_i пропорциональна циркуляции вектора $\vec{\Phi} = (\Phi^x, \Phi^y)$.

Например, требуется:

1) привести уравнение для интегральной функции тока к безразмерному виду;
2) проиллюстрировать влияние изменения параметра Кориолиса с широтой на интенсификацию западных течений.

Пример содержательного описания задания на примере водоема постоянной глубины.

Для водоема постоянной глубины уравнение для интегральной функции тока с учетом инерционных слагаемых и горизонтального турбулентного трения имеет вид:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0 H} J(\Delta \psi, \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + R \Delta \psi = A_H \Delta \Delta \psi + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}, \qquad (1)$$

здесь $J(a,b) = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}$ – оператор Якоби, $\Delta \Delta \psi = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}$ – бигармонический оператор, A_H – коэффициент горизонтального турбулентного трения, $\beta = -\frac{\partial f}{\partial y} \approx 2 \cdot 10^{-13} см^{-1} с^{-1}$ – параметр Россби (как и выше).

Перейдем в уравнении (1) к безразмерным переменным, которые обозначим теми же символами, как и раньше, но с добавлением штриха: $t' = \frac{t}{t_0}, x' = \frac{x}{L}, y' = \frac{y}{L}, \psi' = \frac{\psi}{\psi_0}, \tau' = \frac{\tau}{T_0}$, где в качестве L и величин, обозначенных “ноликом“, выбираются характерные значения потока и внешних воздействий. Переходя к безразмерным переменным, получим

$$\frac{\psi_0}{t_0 L^2}\frac{\partial \Delta' \psi'}{\partial t'} - \frac{\psi_0^2}{\rho_0 H L^4} J(\Delta' \psi', \psi') + \frac{\beta \psi_0}{L}\frac{\partial \psi'}{\partial x'} + \frac{R \psi_0}{L^2}\Delta' \psi' =$$

$$= \frac{A_H \psi_0}{L^4}\Delta' \Delta' \psi' + \frac{T_0}{L}\left(\frac{\partial \tau_y'}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x'}{\partial y}\right). \qquad (2)$$

В качестве характерного масштаба времени t_0 примем отношение характерного горизонтального масштаба L потока к характерной скорости $V_0 = \frac{\psi_0}{\rho_0 H L}$ распространения возмущений. Это означает, что мы рассматриваем только те процессы, у которых скорость распространения возмущений такого же порядка, что и скорость движения частиц. Итак, $t_0 = \frac{L}{V_0} = \frac{\rho_0 H L^2}{\psi_0}$. Считая, что вне непосредственной близости от берегов выполняется геострофический баланс, т.е. справедливо соотношение Свердрупа

$$-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y},$$

найдем характерное значение для функции тока $\psi_0 = \frac{T_0 L}{f_0}$, где f_0 и T_0 – характерные значения параметра Кориолиса и напряжения трения ветра.

Разделив все члены уравнения (2) на $\frac{\psi_0}{t_0 L^2} = \frac{\rho_0 H V_0^2}{L^2}$ и опустив штрихи у безразмерных переменных, получим

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - J(\Delta \psi, \psi) + \beta_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + R_0 \Delta \psi = \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \Delta \psi + \tau_0\left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}\right),$$

где $R_0 = \dfrac{RL}{V_0}$ – параметр придонного трения; $\beta_0 = \dfrac{\beta L^2}{V_0}$ – планетарный параметр; $\mathbf{Re} = \dfrac{LV_0}{A_H}$ – число Рейнольдса; $\tau_0 = \dfrac{T_0 L}{\rho_0 V_0^2 H}$ – ветровой параметр.

Рассчитывая коэффициенты $R_0, \beta_0, \tau_0, \mathbf{Re}^{-1}$ для рассматриваемого потока, можно оценить, какие члены необходимо учесть, для того чтобы с помощью этого уравнения удовлетворительно описать поток.

Удивительной особенностью крупномасштабной горизонтальной поверхностной циркуляции в северной части Атлантического океана является ее восточно-западная асимметрия. Течения вдоль западных берегов Атлантики очень узки и мощны. Для объяснения этого интересного явления рассмотрим модель, предложенную Г. Стоммелом. Рассмотрим “квадратный “ океан постоянной глубины H. Пусть берега океана имеют в безразмерном виде координаты $x = 0;1$ и $y = 0;1$. Напряжение ветра зададим простым функциональным выражением $\tau_y = 0, \tau_x = \dfrac{1}{\pi}\cos\pi y$, отражающим изменение ветра с широтой. Для расчета стационарной океанической циркуляции воспользуемся уравнением

$$\varepsilon\Delta\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\tau_y}{\partial x} - \frac{\partial\tau_x}{\partial y} \quad \text{с краевым условием } \psi\big|_{\Gamma} = 0,$$

где $\varepsilon = \dfrac{R_0}{\beta_0} = 10^{-2}$, а $\dfrac{\partial\tau_y}{\partial x} - \dfrac{\partial\tau_x}{\partial y} = \sin\pi y$.

Решение выписанной краевой задачи легко находится методом разделения переменных и имеет вид

$$\psi(x,y) = \frac{1}{\varepsilon\pi^2}\left(pe^{Ax} + qe^{Bx} - 1\right)\sin\pi y, \tag{5}$$

где $p = \dfrac{1-e^B}{e^A - e^B}, q = 1-p,\ A = -\dfrac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}\right) + \pi^2}, B = -\dfrac{1}{2\varepsilon} - \sqrt{\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}\right) + \pi^2}$.

С учетом того, что $\varepsilon = 10^{-2}$, найдем:

$$A = 0{,}1;\ B = -100;\ p = e^{-0{,}1};\ q = 1 - e^{-0{,}1}.$$

Из решения (5) видно, что решение симметрично относительно $y = 1/2$ по переменной y и, чтобы убедиться в несимметричности картины течений вдоль оси x, рассмотрим поведение функции тока, как функции x при фиксированном значении $y = 1/2$. Нетрудно найти значение, $x = x_0$ при котором достигается экстремум, т.е. значение x_0, при котором производная от функции $\tilde{\psi}(x) = \psi(x, 1/2)$ обращается в нуль. После несложных выкладок найдем, что $x_0 = 0{,}046$. Таким образом, видим, что экстремум расположен вблизи западного берега океана.

Если же рассмотреть случай не вращающегося океана ($f = 0$) или равномерно вращающегося ($f = const$), то с достаточно большой точностью получаем $A = \pi, B = -\pi,\ p = e^{-A}, q = 1$ и

$\psi(x,y)=\dfrac{1}{\varepsilon\pi^2}\left(pe^{\pi(x-1)}+qe^{-\pi x}-1\right)\sin\pi y$. Легко видеть из последнего выражения, что картина течений будет симметрична и по x и по y, так как $\tilde{\psi}'(x)=0$ при значении $x=x_0=1/2$.

Из рассмотренного примера видна важная роль изменения параметра Кориолиса с широтой, которая и является причиной этой асимметрии.

Например, надо найти решение краевой задачи $\dfrac{\partial h}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, $t=0: h=H_0$; $x=0: h=H_1=const$; $x=+\infty: h=H_0=const$, описывающей процесс осушения заболоченного массива одиночным совершенным каналом, в предположении, что уровень воды в канале мгновенно снизился с H_0 до H_1.

Пример содержательного описания задания.

Указанное уравнение – это известное уравнение теплопроводности, допускающее при данных краевых условиях автомодельное решение. Введём новую переменную $y=\dfrac{x}{2\sqrt{at}}$, тогда $h(x,t)=\tilde{h}(y)$.

Так как $\dfrac{\partial h}{\partial t}=\dfrac{\partial\tilde{h}}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}=\dfrac{\partial\tilde{h}}{\partial y}\left(-\dfrac{x}{4t\sqrt{at}}\right)=-\dfrac{y}{2t}\dfrac{\partial\tilde{h}}{\partial y}$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{\partial\tilde{h}}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{1}{2\sqrt{at}}\dfrac{\partial\tilde{h}}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{at}}\dfrac{\partial^2\tilde{h}}{\partial y^2}=\dfrac{1}{4at}\dfrac{\partial^2\tilde{h}}{\partial y^2}$, то задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения $\dfrac{d^2\tilde{h}}{dy^2}+2y\dfrac{d\tilde{h}}{dy}=0$ при следующих граничных условиях: $y=0\,(x=0)$: $\tilde{h}(0)=H_1$, $y=+\infty$ $(x=+\infty$ и $t=0)$: $\tilde{h}(+\infty)=H_0$. Введём переменную $z=\dfrac{d\tilde{h}}{dy}$, тогда придём к уравнению первого порядка $\dfrac{dz}{dy}+2yz=0$. Разделяя переменные, найдём что $\dfrac{dz}{z}=-2ydy$, откуда $\ln|z|=-y^2+\ln\tilde{C}$ или $z=Ce^{-y^2}$, т. е. $\dfrac{d\tilde{h}}{dy}=Ce^{-y^2}$. Следовательно, $\tilde{h}(y)=C\int\limits_0^y e^{-\xi^2}d\xi+C_1$. С учётом краевых условий определим значения произвольных постоянных C и C_1: $\tilde{h}(0)=C_1=H_1$, т. е. $C_1=H_1$; $\tilde{h}(+\infty)=H_1+C\int\limits_0^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi=H_0$. Поэтому $C=\dfrac{H_0-H_1}{\int\limits_0^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi}$.

Таким образом, $\tilde{h}(y)=H_1+\dfrac{H_0-H_1}{\int\limits_0^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi}\int\limits_0^y e^{-\xi^2}d\xi$.

Используя метод Пуассона найдем чему равен интеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi$. Пусть $I=\int\limits_0^{+\infty}e^{-y^2}dy$, тогда $I^2=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta\int\limits_0^{+\infty}e^{-\eta^2}d\eta\ =\ \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\left(\zeta^2+\eta^2\right)}d\zeta d\eta$. Перейдём к полярным координатам $\zeta = r\cos\vartheta$, $\eta = r\sin\vartheta$, тогда якобиан преобразования $J = \dfrac{D(\zeta,\eta)}{D(r,\vartheta)} =$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\zeta}{\partial r} & \dfrac{\partial\zeta}{\partial\vartheta} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial r} & \dfrac{\partial\eta}{\partial\vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r.$$ Следовательно, $I^2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = -\dfrac{\pi}{4} e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{4}$.

Таким образом $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Итак, окончательно имеем

$$h(x,t) = H_1 + (H_0 - H_1)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y e^{-\xi^2} d\xi = H_0 - (H_0 - H_1)(1 - erf\, y).$$

Здесь $erf\, y = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^y e^{-\xi^2} d\xi$ – функция ошибок, $y = \dfrac{x}{2\sqrt{at}}$.

4. Требования к рейтинг-контролю

Контроль знаний проводится в три этапа (два модуля и экзамен), за которые для получения положительной оценки необходимо набрать не менее 40 баллов. Максимально возможный балл за дисциплину равен 100. За первые два модуля максимально можно набрать 60 баллов. За экзамен максимально можно набрать 40 баллов.

VII. Материально-техническое обеспечение

Для аудиторной работы.

Учебная аудитория № 310 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35) Учебная аудитория № 304 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, меловая доска. Набор учебной мебели, экран, комплект аудиотехники (радиосистема, стационарный микрофон с настольным держателем, усилитель, микшер, акустическая система), проектор, ноутбук.
Помещение для самостоятельной работы обучающихся: Компьютерный класс №2 факультета ПМиК № 249 *170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35*	Набор учебной мебели, компьютер, проектор.

Для самостоятельной работы.

Помещение для самостоятельной работы обучающихся: Компьютерный класс №2 факультета ПМиК № 249 *170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35*	Набор учебной мебели, компьютер, проектор.

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№ п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Реквизиты документа, утвердившего изменения
1	11. 2) Программное обеспечение	Внесены изменения в список ПО	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета
2	V. 1) Рекомендуемая литература	Обновление ссылок на литературу	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета