

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 11.10.2023 12:32:18  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1b5708

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:  
Руководитель ООП  
М.А. Крылова  
«11» сентября 2023 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

**Математика в начальном образовании**

Направление подготовки

**44.03.01 Педагогическое образование**

Направленность (профиль)

**"Начальное образование"**

Для студентов очной формы обучения

БАКАЛАВРИАТ

Составители:

Щербакова С.Ю

Лозгачева Т.А.

Тверь, 2023

## **1. Наименование дисциплины в соответствии с учебным планом**

Математика

## **2. Цель и задачи дисциплины**

Целью освоения дисциплины является: обеспечение необходимого уровня теоретической и практической подготовки для успешной реализации будущей профессиональной деятельности по обучению математике младших школьников

Задачи:

- раскрыть мировоззренческое значение математики, углубить представление о роли и месте математики в изучении окружающего мира;
- сформировать систему необходимых математических знаний, составляющих теоретическую основу начального курса математики, сформировать умения и навыки их применения в решении профессиональных задач;
- развить умения самостоятельной работы с математической литературой: учебниками, учебными пособиями и т.п.
- развивать способность к анализу и рефлексии собственной профессиональной деятельности с целью её совершенствования и повышения квалификации

## **3. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП**

Данная дисциплина является обязательной дисциплиной учебного плана, входящей в Блок 1. Дисциплины «Обязательная часть». Дисциплина связана с другими частями образовательной программы (дисциплинами и практиками): «Педагогика», «Психология», «Методика преподавания математики», , учебные и производственные практики.

Требования к «входным» знаниям и умениям обучающегося, необходимым при освоении данной дисциплины: иметь представление о множествах натуральных, рациональных и действительных чисел, арифметических действиях над числами; о числовых выражениях и выражениях с переменной; о функциональной зависимости, об уравнениях и неравенствах и способах их решения; о геометрических фигурах и их свойствах (плоских и пространственных); о доказательстве математических утверждений; о текстовых арифметических и геометрических задачах и способах их решения. Для успешного освоения дисциплины студент должен иметь оценку по математике за курс средней школы не ниже «4».

Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее: «Методика преподавания математики», «Работа педагога с обучающимися, испытывающими трудности при изучении математики», «Внеурочная деятельность младших школьников по математике», учебные и производственные практики, подготовка выпускной квалификационной работы.

**4. Объем дисциплины:** 12 зачетных единиц, 432 академических часа, в том числе:

контактная аудиторная работа: лекции 77 часов, практические занятия 94 часа; самостоятельная работа: 234 часа, контроль 27 часов.

### **5. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы**

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя её базовые составляющие УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи УК-1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам вопросов
ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ОПК-8.3. Применяет специальные научные знания для анализа эффективности своей педагогической деятельности

**6. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения** - зачет в 1 семестре, контрольная работа – во 2 и 3 семестрах, экзамен – в 4 семестре:

**7. Язык преподавания** русский

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)			Самостоятельная работа (час.)
		Лекции	Практические занятия	Контроль самостоятельной работы (в том числе курсовая работа)	
<b>I семестр</b>					
<b>Раздел. Аксиоматическое построение множества целых неотрицательных чисел</b>					
Понятие об аксиоматическом методе построения теории. Аксиомы Пеано. Определение натурального числа. Построение натурального ряда чисел. Свойства множества натуральных чисел, интерпретация их на целочисленном луче, количественные и порядковые натуральные числа. Счет и натуральное число. Требования, предъявляемые к счету.	4	1	-		3
Метод математической индукции и его применение к доказательству утверждений.	5	-	2		3
Аксиоматическое определение сложения, умножения двух чисел, законы операций. Таблицы сложения и умножения натуральных чисел.	5	1	1		3
Определение понятий «больше» и «меньше», свойство монотонности операций сложения и умножения натуральных чисел.	4	1	-		3
Вычитание и деление натуральных чисел: определения, правила.	5	1	1		3

Деление с остатком. Теорема о возможности и единственности деления с остатком. Метод полной индукции и его применение для доказательства математических утверждений.	6	1	2		3
Целые неотрицательные числа (аксиоматический подход).	2	-	-		2
<b>Системы счисления: позиционные и непозиционные</b>					
<b>Алгоритмы арифметических действий</b>					
Позиционные и непозиционные системы счисления.	4	1	-		3
Десятичная система счисления, запись и название чисел в ней, алгоритмы арифметических действий над числами в десятичной системе счисления. Русские счеты.	4	1	-		3
Переход от записи чисел в одной системе счисления к записи в другой. Алгоритмы выполнения арифметических операций над числами в позиционных системах счисления отличных от десятичной.	6	1	2		3
<b>Раздел. Множества и операции над ними</b>					
Множества, способы задания их. Подмножества, универсальное множество. Равные множества. Круги Эйлера.	9	3	3		3
Операции над множествами и их свойства. Декартово произведение двух множеств.	10	4	3		3
Разбиение множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы).	8	2	3		3
<b>Итого в семестре</b>	<b>72</b>	<b>17</b>	<b>17</b>		<b>38</b>
<b>II семестр</b>					

<b>Раздел. Соответствие</b>					
Соответствия между элементами двух множеств. Граф и график соответствия.	9	2	2		5
Свойства соответствий. Взаимно однозначные соответствия. Мощность множества.	13	4	4		5
Бинарные соотношения на множестве их свойства и графы. Соотношения эквивалентности и порядка. Связь соотношения эквивалентности с разбиением множества на классы.	13	4	4		5
<b>Раздел. Теоретико-множественный подход к построению множества целых неотрицательных чисел</b>					
Введение понятия целого неотрицательного числа, нуля, равенства и неравенства целых неотрицательных чисел через понятие множества.	5	1	1		3
Арифметические операции: определение каждой операции, законы.	18	4	4		10
<b>Раздел. Математические утверждения и их структура. Виды теорем</b>					
Основные и определяемые понятия. Способы определения понятий.	9	2	2		5
Высказывания: определение, операции над высказываниями, их свойства.	13	4	4		5
Одноместные предикаты: определение, примеры. Кванторы.	15	5	5		5
Отношения следования и равносильности между предикатами. Необходимые, достаточные, необходимые и достаточные условия. Строение теорем. Математические доказательства.	13	4	4		5

Контроль					
<b>Итого в семестре</b>	108	30	30		48
<b>III семестр</b>					
<b>Раздел. Делимость натуральных чисел</b>					
Отношение делимости на множестве целых неотрицательных чисел, его свойства. Простейшие теоремы о делимости чисел. Невозможность деления на нуль. Признаки делимости на 2,3,4,5,9,10,11,25.	8	2	2		4
Наибольший общий делитель двух натуральных чисел: определение, свойства, нахождение с помощью Алгоритма Евклида.	6	-	2		4
Простые и составные числа. Решето Эратосфена. Бесконечность множества простых чисел (теорема Евклида). Взаимно простые числа. Признак делимости на составное число.	6	-	2		4
Наименьшее общее кратное двух чисел: определение, свойства, связь с наибольшим общим делителем этих чисел. Основная теорема арифметики.	5	-	1		4
Использование канонического представления натурального числа при нахождении НОД и НОК нескольких чисел.	5	-	1		4
<b>Раздел. Расширение понятия числа</b>					
Общая задача расширения понятия числа. Требования, предъявляемые к расширению.	5	1	1		3

Построение множества целых чисел как пар натуральных. Сравнение целых чисел, арифметические операции и их свойства. Операции над парами, соответствующие натуральным и целым отрицательным числам.	5	1	1		3
Свойства множества целых чисел и их геометрическая интерпретация. Теоретико-множественный подход к понятию целого числа.	5	1	1		3
Построение множества рациональных чисел как пар целых чисел. Арифметические операции над рациональными числами: определения, законы операций.	5	1	1		3
Свойства множества рациональных чисел и их геометрическая интерпретация.	1	-	1		-
Обыкновенные дроби, правила выполнения операций над обыкновенными дробями. Десятичные дроби. Проценты. Основные задачи на проценты.	9	1	2		6
<b>Раздел. Величины и их измерение в начальном курсе математики</b>					
Аксиоматическое определение понятия величины. Основные свойства скалярных величин. Понятие измерения величины	6	1	-		5
Величины: длина, площадь, объем, масса, время. Единицы их измерения.	6	-	1		5
<b>Раздел. Функции, уравнения, неравенства</b>					
Определение числовой функции, способы задания функции, свойства функции.	8	1	2		5



Прямая и обратная пропорциональности, линейная, квадратичная функции, их свойства, графики.	8	1	2		5
Понятие числовое выражения и его значения. Свойства отношений «равно», «больше», «меньше» на множестве числовых выражений.	8	1	2		5
Понятие числового равенства и неравенства. Свойства истинных числовых равенств и неравенств.	8	1	2		5
Выражения с переменной: область определения и множество значений. Тожественно равные выражения. Тожественные преобразования выражений с переменными.	8	1	2		5
Понятие уравнения с одной переменной: область определения и множество значений. Равносильные уравнения.	8	1	2		5
Понятие уравнения с двумя переменными. Уравнение с двумя переменными с целыми коэффициентами и решение их в целых и натуральных числах.	8	1	2		5
Понятие неравенства с одной переменной. Решение неравенств с одной переменной.	8	1	2		5
Понятие системы и совокупности неравенств с двумя переменными. Графическое решение.	8	1	2		5
<b>Итого в семестре</b>	144	17	34		93
<b>IV семестр</b>					
<b>Раздел Геометрические понятия в начальном курсе математики</b>					

Из истории возникновения и развития геометрии. Система аксиом Евклида-Гильберта.	4				4
<b>Начальные геометрические сведения</b>					
Геометрическая фигура как точечное множество. Геометрические фигуры на плоскости их свойства. Основные теоремы.	6				6
Пространственные геометрические фигуры, определения, свойства и их изображение на плоскости. Требования к чертежу в учебном процессе	4				4
<b>Геометрические преобразования плоскости</b>					
Понятие преобразования множества. Движения плоскости	6	1	1		4
Частные виды движений. Параллельный перенос: определение и свойства. Поворот: определение и свойства поворота Центральная симметрия: определение, свойства, связь с поворотом Осевая симметрия относительно прямой	18	4	4		10
Подобие: определение и свойства. Гомотетия как частный случай подобия.	6	1	1		4
<b>Элементы теории геометрических построений на плоскости с помощью циркуля и линейки</b>					
Общая постановка задачи на построение. Этапы решения задачи на построение. Простейшие и основные построения	13	2	3		8

Методы решения задач на построение: метод геометрических мест точек, метод преобразований, алгебраический метод	17	3	4		10
<b>Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости</b>					
Предмет и метод аналитической геометрии. Метод координат на прямой.	2	1			1
Метод координат на плоскости. Основные задачи, решаемые методом координат на плоскости. Движения на координатной плоскости	5	1			4
Контроль	27			27	
<b>Итого в семестре</b>	108	13	13	27	55
<b>Итого по дисциплине</b>	432	77	94	27	234

### III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем <i>(в строгом соответствии с разделом II РПД)</i>	Вид занятия	Образовательные технологии
<b>Раздел. Аксиоматическое построение множества целых неотрицательных чисел</b>		

<p>Понятие об аксиоматическом методе построения теории. Аксиомы Пеано. Определение натурального числа. Построение натурального ряда чисел. Свойства множества натуральных чисел, интерпретация их на целочисленном луче, количественные и порядковые натуральные числа. Счет и натуральное число. Требования, предъявляемые к счету.</p>	<p>ЛК ПЗ</p>	<p>Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков</p>
<p>Метод математической индукции и его применение к доказательству утверждений.</p>	<p>ПЗ</p>	<p>Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков</p>
<p>Аксиоматическое определение сложения, умножения двух чисел, законы операций. Таблицы сложения и умножения натуральных чисел.</p>	<p>ЛК</p>	<p>Традиционная лекция</p>
<p>Определение понятий «больше» и «меньше», свойство монотонности операций сложения и умножения натуральных чисел.</p>	<p>ЛК ПЗ</p>	<p>Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков</p>
<p>Вычитание и деление натуральных чисел: определения, правила.</p>	<p>ЛК ПЗ</p>	<p>Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков</p>
<p>Деление с остатком. Теорема о возможности и единственности деления с остатком. Метод полной индукции и его применение для доказательства математических утверждений.</p>	<p>ЛК ПЗ</p>	<p>Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков</p>
<p>Целые неотрицательные числа (аксиоматический подход).</p>	<p>ПЗ</p>	<p>Устный опрос по самостоятельному изучению темы</p>
<p><b>Системы счисления: позиционные и непозиционные</b> <b>Алгоритмы арифметических действий</b></p>		
<p>Позиционные и непозиционные системы счисления.</p>	<p>ЛК ПЗ</p>	<p>Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков</p>

Десятичная система счисления, запись и название чисел в ней, алгоритмы арифметических действий над числами в десятичной системе счисления. Русские счеты.	ПЗ	Устный опрос по самостоятельному изучению темы Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Переход от записи чисел в одной системе счисления к записи в другой. Алгоритмы выполнения арифметических операций над числами в позиционных системах счисления отличных от десятичной.	ПЗ	Устный опрос по самостоятельному изучению темы Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
<b>Раздел. Множества и операции над ними</b>		
Множества, способы задания их. Подмножества, универсальное множество. Равные множества. Круги Эйлера.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Операции над множествами и их свойства. Декартово произведение двух множеств.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Разбиение множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы).	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков Технологии проблемного обучения
<b>Раздел. Соответствия</b>		
Соответствия между элементами двух множеств. Граф и график соответствия.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Свойства соответствий. Взаимно однозначные соответствия. Мощность множества.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков Технологии проблемного обучения

Бинарные соотношения на множестве их свойства и графы. Соотношения эквивалентности и порядка. Связь соотношения эквивалентности с разбиением множества на классы.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков Технологии проблемного обучения
<b>Раздел. Теоретико-множественный подход к построению множества целых неотрицательных чисел</b>		
Введение понятия целого неотрицательного числа, нуля, равенства и неравенства целых неотрицательных чисел через понятие множества.	ПЗ	Устный опрос по самостоятельному изучению темы Технологии проблемного обучения
Арифметические операции: определение каждой операции, законы.	ПЗ	Устный опрос по самостоятельному изучению темы Технологии проблемного обучения
<b>Раздел. Математические утверждения и их структура. Виды теорем</b>		
Основные и определяемые понятия. Способы определения понятий.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Высказывания: определение, операции над высказываниями, их свойства.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков Технологии проблемного обучения
Одноместные предикаты: определение, примеры. Кванторы.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков Технологии проблемного обучения
Отношения следования и равносильности между предикатами. Необходимые, достаточные, необходимые и достаточные условия. Строение теорем. Математические доказательства.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
<b>Раздел. Делимость натуральных чисел</b>		

Отношение делимости на множестве целых неотрицательных чисел, его свойства. Простейшие теоремы о делимости чисел. Невозможность деления на нуль. Признаки делимости на 2,3,4,5,9,10,11,25.	ЛК	Лекция-презентация
Наибольший общий делитель двух натуральных чисел: определение, свойства, нахождение с помощью Алгоритма Евклида.	ПЗ	Устный опрос по самостоятельному изучению темы Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Простые и составные числа. Решето Эратосфена. Бесконечность множества простых чисел (теорема Евклида). Взаимно простые числа. Признак делимости на составное число.	ПЗ	Устный опрос по самостоятельному изучению темы Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Наименьшее общее кратное двух чисел: определение, свойства, связь с наибольшим общим делителем этих чисел. Основная теорема арифметики.	ПЗ	Устный опрос по самостоятельному изучению темы Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Использование канонического представления натурального числа при нахождении НОД и НОК нескольких чисел.	ПЗ	Устный опрос по самостоятельному изучению темы Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
<b>Раздел. Расширение понятия числа</b>		
Общая задача расширения понятия числа. Требования, предъявляемые к расширению.	ЛК	Лекция-презентация
Построение множества целых чисел как пар натуральных. Сравнение целых чисел, арифметические операции и их свойства. Операции над парами, соответствующие натуральным и целым отрицательным числам.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков

Свойства множества целых чисел и их геометрическая интерпретация. Теоретико-множественный подход к понятию целого числа.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Построение множества рациональных чисел как пар целых чисел. Арифметические операции над рациональными числами: определения, законы операций.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Свойства множества рациональных чисел и их геометрическая интерпретация.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Обыкновенные дроби, правила выполнения операций над обыкновенными дробями. Десятичные дроби. Проценты. Основные задачи на проценты.	ПЗ	Устный опрос по самостоятельному изучению темы Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
<b>Раздел. Величины и их измерение в начальном курсе математики</b>		
Аксиоматическое определение понятия величины. Основные свойства скалярных величин. Понятие измерения величины	ЛК	Традиционная лекция
Величины: длина, площадь, объем, масса, время. Единицы их измерения.	ПЗ	Устный опрос по самостоятельному изучению темы
<b>Раздел. Функции, уравнения, неравенства</b>		
Определение числовой функции, способы задания функции, свойства функции.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Прямая и обратная пропорциональности, линейная, квадратичная функции, их свойства, графики.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков



Понятие числовое выражения и его значения. Свойства отношений «равно», «больше», «меньше» на множестве числовых выражений.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Понятие числового равенства и неравенства. Свойства истинных числовых равенств и неравенств.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Выражения с переменной: область определения и множество значений. Тожественно равные выражения. Тожественные преобразования выражений с переменными.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Понятие уравнения с одной переменной: область определения и множество значений. Равносильные уравнения.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Понятие уравнения с двумя переменными. Уравнение прямой линии, окружности. Уравнение с двумя переменными с целыми коэффициентами и решение их в целых и натуральных числах.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Системы уравнений с двумя переменными и способы их решения.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Понятие неравенства с одной переменной. Решение неравенств с одной переменной.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Понятие системы и совокупности неравенств с двумя переменными. Графическое решение.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
<b>Раздел 6. Геометрические понятия в начальном курсе математики</b>		

Из истории возникновения и развития геометрии. Система аксиом Евклида-Гильберта	Самостоятельная работа	Устный опрос по самостоятельному изучению темы
<b>Начальные геометрические сведения</b> Геометрическая фигура как точечное множество. Геометрические фигуры на плоскости их свойства. Основные теоремы планиметрии	Самостоятельная работа	Устный опрос по самостоятельному изучению темы
Пространственные геометрические фигуры, определения, свойства и их изображение на плоскости. Требования к чертежу в учебном процессе	Самостоятельная работа	Устный опрос (коллоквиум) по самостоятельному изучению темы «Начальные геометрические сведения»
<b>Геометрические преобразования плоскости</b> Понятие преобразования множества. Движения плоскости	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач
Частные виды движений. Параллельный перенос: определение и свойства. Поворот: определение и свойства поворота	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Центральная симметрия: определение, свойства, связь с поворотом Осевая симметрия относительно прямой	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Подобие: определение и свойства. Гомотетия как частный случай подобия.	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
<b>Элементы теории геометрических построений на плоскости с помощью циркуля и линейки</b> Общая постановка задачи на построение. Этапы решения задачи на построение. Простейшие и основные построения	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков
Методы решения задач на построение: метод геометрических мест точек, метод преобразований, алгебраический метод	ЛК ПЗ	Традиционная лекция Решение задач по отработке основных теоретических понятий и практических навыков

<b>Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости</b> Предмет и метод аналитической геометрии. Метод координат на прямой.	ЛК	Традиционная лекция
Метод координат на плоскости. Основные задачи, решаемые методом координат на плоскости. Движения на координатной плоскости	ЛК	Лекция-презентация

#### **IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации**

*Оценочные материалы для проведения текущей аттестации могут включать: контрольные вопросы и задания для семинарских/практических/лабораторных занятий, контрольных работ, коллоквиумов, образцы контрольных тестов, темы рефератов, эссе, творческих заданий*

##### **Задание: Письменные ответы на вопросы**

##### ***Раздел. Аксиоматическое построение множества целых неотрицательных чисел***

1. Понятие об аксиоматическом методе построения теории. Правила построения аксиоматической теории. Требования к аксиомам. Примеры аксиоматического построения теорий.
2. Отношение «предшествует», его свойства.
3. Аксиомы Пеано.
4. Сложение и вычитание натуральных чисел (аксиоматический подход). Компоненты, законы сложения, правила вычитания.
5. Определение натурального числа. Построение натурального ряда чисел. Отношение «меньше». Свойства множества натуральных чисел.
6. Умножение и деление натуральных чисел (аксиоматический подход). Компоненты, законы умножения, правила деления.
7. Построение множества целые неотрицательные чисел (аксиоматический подход).
8. Арифметические действия на множестве целых неотрицательных чисел. Деление с остатком.

##### ***Раздел. Множества и операции над ними***

1. Что изучает теория множеств?
2. Что такое множество в понимании Кантора?
3. Что называют элементами множества? Как они обозначаются?
4. Назовите способы задания множеств. Введите обозначения.
5. Какое множество называется пустым? Как оно обозначается? Приведите примеры пустого множества.
6. Какие множества считаются равными? Приведите примеры двух равных множеств.
7. Перечислите числовые множества в порядке расширения.

8. Что такое подмножество? Приведите пример множеств, одно из которых является подмножеством другого. Запишите их отношение при помощи символов.
9. Какое подмножество называется собственным?
10. Какие подмножества называются несобственными?
11. Приведите примеры универсальных множеств.
12. Дайте определение объединения множеств и перечислите свойства.
13. Постройте графическую иллюстрацию пересечения множеств.
14. Постройте графическую иллюстрацию объединения множеств.
15. Дайте определение пересечения множеств и перечислите свойства.
16. Дайте определение разности множеств. Постройте графическую иллюстрацию.
17. Что такое дополнение?
18. Что называют декартовым произведением множеств?
19. Что такое кортеж?
20. Что такое классификация?
21. Каким условиям должна удовлетворять классификация?
22. Приведите пример верной классификации.
23. Приведите пример неверной классификации

### *Раздел. Соответствие*

1. Что такое соответствие?
2. Дайте определение графика соответствия
3. Что такое область определения и множество значений соответствия?
4. Какое соответствие называют обратным?
5. Что называют графами соответствия? Опишите его.
6. Что называют образом элемента при соответствии?
7. Что называют прообразом элемента при соответствии?
8. Дайте определение объединения и пересечения соответствий.
9. Дайте определение разности соответствий.
10. Какое соответствие называется всюду определенным?
11. Какое соответствие называется сюръективным?
12. Какое соответствие называется инъективным?
13. Какое соответствие называется функциональным?
14. Какие множества называются эквивалентными?
15. Какое множество называется счетным?
16. Как называются множества, между которыми установлено соответствие?
17. Какое соответствие называется отображением? Взаимно однозначным?
18. Какие множества называются равномошными?
19. Какие множества называются счетными/несчетными?
20. Приведите примеры счетных и несчетных множеств.
21. Какое отношение называется рефлексивным? В чем заключается особенность графов рефлексивного отношения?
22. Какое отношение называется антирефлексивным?
23. В чем заключается особенность графов симметричного отношения? В чем заключается особенность графов симметричного отношения?

24. Какое отношение называется асимметричным?
25. Какое отношение называется транзитивным?
26. Какое отношение называется антисимметричным?
27. Какое отношение называется антитранзитивным?
28. Какое отношение называется связным?
29. Какое отношение называется отношением эквивалентности.
30. Какое отношение называется отношением строгого (нестрогого) порядка.
31. Какое множество называется линейно упорядоченным/ частично упорядоченным.
32. Какое множество называется плотным?
33. Какое множество называется дискретным?

***Раздел. Теоретико-множественный смысл целого неотрицательного числа и операций над числами***

1. Раскрыть смысл действия сложения с позиций теоретико-множественного подхода (изобразить на кругах Эйлера). Пример арифметической задачи на сложение.

2. Раскройте смысл действия вычитания с позиций теоретико-множественного подхода (изобразить на кругах Эйлера). Перечислите свойства. Назовите компоненты действия. Пример арифметической задачи на вычитание.

3. Какое деление называется делением по содержанию с позиций теоретико-множественного подхода. Назовите компоненты действия. Примеры арифметических задач на деление.

4. Какое деление называется делением на равные части. с позиций теоретико-множественного подхода. Назовите компоненты действия. Примеры арифметических задач на деление.

5. Определение количественного натурального числа и нуля с теоретико-множественного подхода.

6. Раскройте смысл действия умножения с позиций теоретико-множественного подхода. Перечислите свойства. Пример арифметической задачи на умножение.

**Раздел. Математические утверждения и их структура. Виды теорем**

1. Что такое понятие?
2. Приведите примеры основных и определяемых понятий.
3. Какие понятие называют совместимыми? Приведите пример.
4. Каково соотношение между объемом и содержанием понятия?
5. Как называются понятия  $a$  и  $b$ , если  $A \subset B$ ?
6. Перечислите способы определения понятий.
7. Приведите пример определения понятий генетическим способом.
8. Приведите пример определения понятий через противоположность.
9. Приведите примеры понятий, которые находятся в отношении рода и вида.

10. Приведите примеры понятий, которые находятся в отношении части и целого.
11. Какое предложение называется составным?
12. Приведите пример элементарного математического предложения?
13. Перечислите логические связки.
14. Укажите этапы определения логической структуры математического предложения.
15. Какое предложение называется высказыванием?
16. Приведите примеры ложного и истинного математического высказываний.
17. Что называют конъюнкцией высказываний? Приведите пример. Введите обозначение.
18. Что называют дизъюнкцией высказываний? Приведите пример. Введите обозначение.
19. Что называют отрицанием высказываний? Приведите пример. Введите обозначение.
20. Приведите пример предложения, не являющегося высказыванием.
21. Что такое предикат? Приведите пример. Введите обозначение.
22. Что называют множеством истинности предиката?
23. Что называют отрицанием предиката?
24. Как связаны множества истинности предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$  и их конъюнкция.
25. Как связаны множества истинности предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$  и их дизъюнкция.
26. Как связаны множества истинности предиката и его отрицания?
27. Как устанавливается ложность и истинность высказываний с квантором общности?
28. Как устанавливается ложность и истинность высказываний с квантором существования?
29. Как построить отрицания высказывания с квантором существования?
30. Как построить отрицания высказывания с квантором общности?
31. Определите отношение следования и укажите необходимое условие?
32. Определите отношение следования и укажите достаточное условие?
33. Перечислите виды теорем.
34. Как связаны между собой различные виды теорем?

### **Раздел. Расширение понятия числа**

1. В чем состоит необходимость расширения понятия натурального числа?
2. Сформулируйте требования к расширению множества  $A$  до множества  $B$ .
3. Какое множество является 1-м расширением понятия числа?
4. Сформулируйте целевое требование 1-го расширения?
5. Что означает запись:  $m = (a; b)$ , где  $a, b \in \mathbb{N}$  ?
6. Запишите пары в традиционной форме записи целых чисел:
  - а)  $(2; 7)$ ;
  - б)  $(4; 4)$ ;
  - в)  $(6; 2)$ .

7. Дайте геометрическую интерпретацию множества целых чисел и его свойств.
8. Запишите в математических символах на основе теории пар:
- законы сложения целых чисел;
  - законы умножения целых чисел;
  - свойство монотонности сложения целых чисел;
  - свойство монотонности умножения целых чисел.
9. Сравните по величине целые числа:
- (2; 11) и (4; 1);
  - (5; 5) и (3; 1).
10. Докажите, что для любой пары натуральных чисел (a; b) и  $\forall n, m \in \mathbb{N}$  выполняются соотношения:
- (a; b) + (n; n)  $\sim$  (a; b);
  - (a; b)  $\times$  (n; n)  $\sim$  (m; m);
  - (a; b)  $\times$  (n+1; n)  $\sim$  (a; b).
11. Прочитайте предложение:  $n(A) = 17$ . В какой роли здесь выступает число 17?
12. Дайте теоретико-множественное толкование числам:
- 120;
  - 0;
  - 5.
13. Из нижеуказанных множеств отметьте знаком «+» те, которые являются подмножествами множества целых чисел:
- $A = \{0; -3; -\frac{4}{2}; \frac{32}{16}\}$ ;
  - $B = \{\frac{n}{2}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}\}$ ;
  - $D = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \{0\}$ ;
  - $E = \{y = x, \text{ если } x \in \mathbb{Z}_+\}$ .

## РАЗДЕЛ. ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА

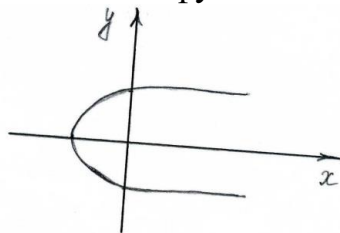
### Понятие числовой функции

- Что такое бинарное отношение между элементами множеств?
- Что такое соответствие между множествами?
- Что такое граф и график соответствия?
- Какое соответствие является функциональным?
- Какое соответствие между множествами является обратным данному?
- Дайте определение числовой функции.
- Пусть графики соответствий заданы множествами:
  - $\{(5;3); (0;1); (7;7); (3;1); (4;1)\}$ ;
  - $\{(1;1); (2;3); (1;5); (2;7); (3;3)\}$ .
 Какой из графиков является функциональным?
- Перечислите способы задания функций.
- Функция  $f$  задана при помощи таблицы:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

y	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

- а) Укажите её область определения и множество значений.  
 б) Задайте эту функцию аналитически.
10. Какая функция называется чётной (нечётной)?  
 11. Какая функция называется монотонной?  
 12. Какая функция называется монотонно возрастающей (монотонно убывающей)?  
 13. Является ли кривая на координатной плоскости (см. рис.) графиком какой-либо функции?



### Прямая и обратная пропорциональности Линейная функция

- Сколько точек и какие определяют график прямой пропорциональности?
- Какая линия является графиком прямой пропорциональности?
- Каков геометрический смысл коэффициента прямой пропорциональности?
- Запишите в математических символах основное свойство прямой пропорциональности.
- Какую линию описывает функция  $y = x$ ?
- Назовите группы величин, связанных между собой прямой пропорциональной зависимостью.
- Как называется график обратной пропорциональности?
- Исследуйте на чётность или нечётность прямую и обратную пропорциональности.
- Являются ли прямая и обратная пропорциональности монотонными на всей области определения?
- Укажите числовой промежуток, являющийся областью допустимых значений функции:  
 а)  $y = -\frac{1}{5}x$ ; б)  $y = \frac{5}{x}$

### Квадратичная функция

- Что такое квадратный трёхчлен? Приведите формулу для вычисления дискриминанта.
- Укажите общий вид квадратичной функции.
- Как называется линия, являющаяся графиком квадратичной функции?
- При каком условии парабола проходит через начало координат?
- При каком условии ветви параболы направлены вверх (вниз)?
- Симметричен ли график квадратичной функции относительно оси ординат?
- Изобразите схематически на координатной плоскости графики функций  $y = 3x^3$  и  $y = -5x^2$ .



8. Найдите координаты вершины параболы, которая задана формулой  $y = 2x^2 + x - 3$ .
9. При каком условии график квадратичной функции пересекает ось абсцисс в двух точках?
10. Исследуйте квадратичную функцию на чётность.
11. Является ли квадратичная функция монотонной?

### **Числовое выражение и его значение.**

#### **Числовые равенства и неравенства**

1. Что называется числовым выражением?
2. Является ли числовое выражение высказыванием?
3. Любое ли числовое выражение имеет значение? Ответ обоснуйте.
4. Что такое истинное числовое равенство?
5. Перечислите основные свойства истинных числовых равенств.
6. Что такое истинное числовое неравенство?
7. Перечислите основные свойства истинных числовых неравенств.
8. Приведите примеры заданий из учебников по математике для начальной школы, при решении которых используются те или иные свойства истинных числовых равенств или неравенств.

#### **Выражения с переменной. Уравнения с одной переменной**

1. Что понимается под выражением с переменными?
2. Что такое область определения и что такое множество значений выражения с переменными?
3. Какие выражения с переменными называются тождественно равными?
4. Могут ли два выражения быть тождественно равны на одном числовом множестве и не равны на другом? Ответ обоснуйте.
5. Какие тождественные преобразования выражений с переменными рассматриваются в начальном курсе математики?
6. Приведите примеры заданий из учебников математики начальной школы, при решении которых используются выражения с переменными.
7. Что называется уравнением с одной переменной? Приведите примеры.
8. Какие уравнения называются равносильными?
9. Могут ли два уравнения быть равносильными на одном числовом множестве и не равносильными на другом? Ответ обоснуйте.
10. Что такое линейное уравнение? Виды линейных уравнений и способы их решения.
11. Приведите общий вид квадратного уравнения. Что такое приведённое квадратное уравнение. Приведите формулы для решения тех и других уравнений.

#### **Неравенства с одной переменной**

1. Что называется неравенством?
2. Какие неравенства называются равносильными?
3. Могут ли два неравенства быть равносильными на одном числовом множестве и неравносильными на другом? Ответ обоснуйте.
4. Укажите способы решения неравенств 1-й и 2-й степени с одной переменной.

5. Сформулируйте теоремы о равносильных неравенствах и следствия из них.
6. Каким образом теоремы о равносильных неравенствах применяются при решении конкретных неравенств?

### Уравнения и неравенства с модулем

1. Дайте определение модуля числа  $x$ .
2. Какое уравнение называется уравнением с модулем?
3. Что такое критическая точка?
4. Сформулируйте алгоритм решения уравнения с модулем.
5. Что является решением уравнения с модулем?
6. Запишите решение неравенства с модулем вида  $|f(x)| \leq a$ .
7. Запишите решение неравенства с модулем вида  $|f(x)| \geq a$ .

### Уравнение и системы уравнений с двумя переменными. Уравнение линии. Уравнение окружности

1. Каков общий вид уравнения с двумя переменными?
2. Что значит решить уравнение с двумя переменными?
3. Сколько решений имеет такое уравнение?
4. Являются ли пары  $(1;5)$  и  $(-2;7)$  решениями уравнения  $x+2y=12$ ? Запишите множество решений данного уравнения.
5. Можно ли сказать, что любая пара чисел является решением уравнения  $x+2y=7$ ?
6. Что понимается под системой уравнений с двумя переменными?
7. Что является решением этой системы?
8. При каком условии две системы уравнений являются равносильными?
9. Система уравнений задана в виде

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Сформулируйте условия, при которых эта система имеет:

- а) единственное решение,
  - б) бесконечно много решений,
  - в) не имеет решений.
10. Какие способы решения системы уравнений с двумя переменными вам известны?
  11. Какой вид имеет уравнение окружности? Как определить центр окружности и её радиус по данному уравнению?
  12. Среди следующих записей укажите уравнение линии:
    - а)  $y - 1,5x = 0$ ; б)  $y + \frac{3}{x} = 0$ ; в)  $y - x^2 - 3x - 6 = 0$ ; г)  $9x - y$ ; д)  $x^2 + y^2 = 9$ ; е)  $3x + 4y = 5$ ; ж)  $2y + 6 = 7$ .

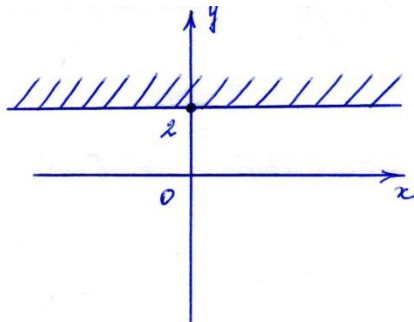
### Системы и совокупности неравенств с одной переменной

1. Что называется неравенством с одной переменной?
2. Какие неравенства называются равносильными?
3. Что значит «решить неравенство»?
4. Могут ли два неравенства быть равносильными на одном числовом множестве и неравносильными на другом? Ответ поясните.

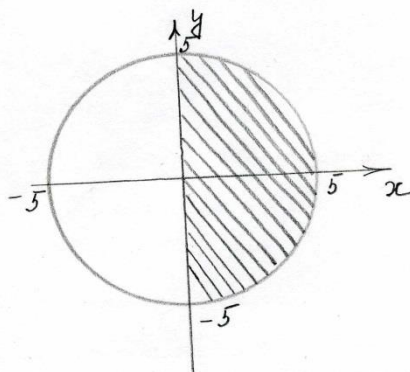
5. Сформулируйте теоремы о равносильности неравенств.
6. Каким образом теоремы о равносильности неравенств применяются при решении конкретных неравенств?
7. Что такое множество решений системы неравенств?
8. Что такое множество решений совокупности неравенств?
9. Известно, что число  $k$  является решением одного неравенства и не является решением другого. Является ли число  $k$  а) решением системы неравенств; б) решением совокупности неравенств?

### Неравенства и системы неравенств с двумя переменными и их графическое решение

1. Что называется неравенством с двумя переменными?
2. Что значит решить неравенство с двумя переменными?
3. Пусть  $M$  — множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству  $y \leq -x^2 + 5$ . Принадлежат ли множеству  $M$  точки  $A(0;2)$ ,  $B(-1;1)$ ?
4. Запишите неравенство, которое задаёт полуплоскость, показанную штриховкой на координатной плоскости:



5. Что называют системой неравенств с двумя переменными?
6. Что представляет собой решение системы неравенств с двумя переменными?
7. Является ли решением системы неравенств  $\begin{cases} 2x + 3y > -1, \\ x^2 + y \leq 2 \end{cases}$  пара значений переменных  $x$  и  $y$ : а)  $(0;0)$ ; б)  $(1; -1)$ , в)  $(-1;0,5)$ , г)  $(\frac{1}{3};1)$ ?
8. Запишите систему неравенств, которая задаёт множество точек, показанное ниже штриховкой на координатной плоскости:



Планируемый образовательный результат (компетенция, индикатор)	Формулировка задания (2-3 примера)	Вид и способ проведения промежуточной аттестации	Критерии оценивания и шкала оценивания
УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие	В равнобедренном треугольнике один из внешних углов равен $60^\circ$ , высота, проведенная к боковой стороне, равна 17 см. Найдите основание треугольника.	Коллоквиум/ Устный ответ с теоретическими обоснованиями решенной задачи	<p>2 балла – Умеет анализировать задачу и правильно выделяет ее базовые составляющие, на основе знания ключевых понятий</p> <p>1 балл – Знает ключевые понятия, но неверно выделяет базовые составляющие задачи при ее анализе</p> <p>0 баллов- Не владеет навыками анализа задачи</p> <p>ИЛИ</p> <p>Не знает ключевые понятия</p>
УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи	Составить таблицу «Классификация движений плоскости по числу инвариантных элементов»	Ситуационные задания / письменный	<p>2 балла – Умеет на основе анализа задачи правильно интерпретировать информацию, требуемую для ее решения</p> <p>1 балл – Допускает ошибки при интерпретировании или ранжировании информации для решения поставленной задачи, но исправляет их после подсказки</p> <p>0 баллов- Не может интерпретировать и ранжировать информацию для решения поставленной задачи даже после подсказки</p>
УК-1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам вопросов	С помощью циркуля и линейки построить прямоугольный треугольник по	Коллоквиум/ Письменное решение задач с последующим устным ответом	<p>2 балла – Знает и правильно выбирает способ решения поставленной задачи</p> <p>1 балл – Знает различные способы, но неправильно выбирает для решения поставленной задачи, однако исправляет ошибку после замечания</p>

	гипотенузе и острому углу.	преподавателя <i>0 баллов</i> - Не знает способов
		ИЛИ
		неправильно выбирает способ <i>2 балла</i> - Правильно выполняет задание, умеет интерпретировать полученные результаты, обладает навыками выполнения заданий на компьютере с использованием различных программы (например, SPSS) <i>1 балл</i> – Правильно выполняет задание, но затрудняется в интерпретации полученных результатов, обладает навыками выполнения заданий на компьютере с использованием различных программы (например, SPSS) <i>0 баллов</i> – Задание выполнено неверно
ОПК-8.3. Применяет специальные научные знания для анализа эффективности своей педагогической деятельности	Доказать теоремы делимости натуральных чисел	

Вопросы для проведения промежуточного контроля знаний студентов  
**Раздел 6. Геометрические понятия в начальном курсе математики**

*Вопросы к коллоквиуму, Модуль 1*

1. Сущность аксиоматического метода построения математической теории. Требования, предъявляемые к системе аксиом.
2. Система аксиом Гильберта евклидовой плоскости. Аксиомы принадлежности и порядка, их ближайшие следствия, доказательство одного из них. Луч, отрезок, угол, ломаная. Определения, примеры, чертежи.
3. Система аксиом Гильберта евклидовой плоскости. Аксиомы равенства (конгруэнтности), аксиомы непрерывности и аксиома параллельности.
4. Параллельные прямые, свойства и признаки. Доказательство одного из свойств.
5. Параллельные прямые, свойства и признаки. Доказательство одного из признаков.
6. Треугольники, классификация треугольников по сторонам и углам. Теорема о сумме внутренних углов треугольника, доказательство.

7. Биссектриса треугольника определение, свойства. Доказательство одного из свойств.

8. Высота треугольника, определение, свойства. Доказательство одного из свойств.

9. Медиана треугольника, определение, свойства. Доказательство одного из свойств.

10. Равнобедренный треугольник и его свойства. Доказательство одного из свойств.

11. Прямоугольный треугольник и его свойства. Доказательство одного из свойств.

12. Признаки равенства треугольников. Доказательство одного из них.

13. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Доказательство одного из них.

14. Теорема Пифагора: формулировка, одно из доказательств, чертеж.

15. Многоугольники, выпуклые и невыпуклые многоугольники. Частные виды многоугольников. Правильные многоугольники.

16. Четырехугольники и их виды. Параллелограмм, определение, свойства и признаки. Доказательство одного из них.

17. Частные виды параллелограмма: ромб, прямоугольник, квадрат; их взаимосвязь. Доказательство одного из свойств ромба (прямоугольника).

18. Трапеция, виды трапеций. Доказательство одного из свойств трапеции.

19. Окружность и круг: определения, их элементы. Касательная к окружности и ее свойства. Доказательство одного из свойств.

20. Вписанные и центральные углы. Теоремы о вписанном и центральном угле, доказательство, чертеж.

21. Вписанные и описанные четырехугольники и их свойства. Доказательство одного из свойств.

### *Вопросы к коллоквиуму, Модуль 2*

1. Преобразования плоскости. Движение: определение и свойства движения. Доказательство одного из свойств. Примеры.

2. Параллельный перенос, определение, свойства и построение образов фигур при параллельном переносе. Примеры. Доказательство одного из свойств.

3. Осевая симметрия, определение, свойства и построение образов фигур при осевой симметрии. Примеры. Доказательство одного из свойств.

4. Поворот, определение, свойства и построение образов фигур при повороте. Примеры. Доказательство одного из свойств.

5. Центральная симметрия, определение, свойства и построение образов фигур при центральной симметрии. Примеры. Центральная симметрия как частный случай поворота. Доказательство одного из свойств.
6. Классификация движений по числу инвариантных элементов
7. Движения на координатной плоскости
8. Подобие, определение, свойства. Примеры. Гомотетия как частный случай подобия. Примеры. Связь с движением
9. Общая постановка задачи на построение. Этапы решения задачи на построение циркулем и линейкой. Примеры.
10. Простейшие построения и основные построения циркулем и линейкой. Пример одного из этих построений (будет указан в билете).
11. Геометрические места точек: перечислить, описать и построить два из них (будут указаны в билете).
12. Методы решения задач на построение. Пример решения задачи методом параллельного переноса
13. Методы решения задач на построение. Пример решения задачи методом поворота
14. Методы решения задач на построение. Пример решения задачи методом осевой симметрии
15. Методы решения задач на построение. Пример решения задачи методом центральной симметрии

## **V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### 1) Рекомендуемая литература

#### а) Основная литература

1. Грес П.В. Математика для бакалавров. Универсальный курс для студентов гуманитарных направлений [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Грес П.В.— М.: Логос, 2013.— 288 с. Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/16957.html>

2. Березина Н.А. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.А. Березина. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Научная книга, 2012. — 159 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/8233.html>

#### б) Дополнительная литература

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для вузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 401 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07001-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/510750>

2. Математика [Электронный ресурс]: задачник. Направление подготовки 040700 – Организация работы с молодежью; 034400 – Физическая культура для лиц с отклонениями в состоянии здоровья (Лечебная физическая культура); 100400 – Туризм (Технология и организация спортивно-оздоровительных услуг), 050100 – Педагогическое образование (профили: «Биология и химия», «Экономика и география»); 050400 – Психолого-педагогическое образование; 030300 – Психология/ М.С. Ананьева [и др.].— Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2014.— 78 с. Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/32059.html>.

## 2) Программное обеспечение

Google Chrome	бесплатное ПО
Яндекс Браузер	бесплатное ПО
Kaspersky Endpoint Security 10	акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE	бесплатное ПО
ОС Linux Ubuntu	бесплатное ПО

## 3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com) ;
2. ЭБС «ЮРАИТ» [www.biblio-online.ru](http://www.biblio-online.ru) ;
3. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/> ;
4. ЭБС IPRbooks <http://www.iprbookshop.ru/> ;
5. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com> ;
6. ЭБС BOOK.ru <https://www.book.ru/>
7. ЭБС ТвГУ <http://megapro.tversu.ru/megapro/Web>
8. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (подписка на журналы) [https://elibrary.ru/projects/subscription/rus\\_titles\\_open.asp?](https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp?) ;
9. Репозиторий ТвГУ <http://eprints.tversu.ru>

## Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

- Кулагина Г.А., Толстихина Г.А. Алгебраические понятия в содержании дисциплины «Математика»: учеб. пособие. Тверь, 2008.
  - Кулагина Г.А. Элементы аналитической геометрии на плоскости: учеб. пособие. Тверь, 2009.
  - Кулагина Г.А., Толстихина Г.А. Геометрические понятия в содержании дисциплины «Математика»: учеб. пособие. Тверь, 2011.
  - Лозгачева Т.А. Математика: множества, соответствия, утверждения: конспект лекций. ТвГУ, 2018.



- Кулагина Г.А. Элементы теории чисел // Методические рекомендации для студентов 2-го и 3-го курсов дневного педагогического факультета. Тверь. ТвГУ, 2002, 30 стр.
- Кулагина Г.А., Толстихина Г.А. Числовые множества// Методические рекомендации для студентов очной и заочной форм обучения педагогического факультета. Тверь. ТвГУ, 2003, 47 стр.
- Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. М., 1988.
- Стойлова Л.П. и др. Задачи для контрольных работ по математике. М., 1993.
- Толстихина Г.А., Кулагина Г.А. Контролирующие задания по курсу «Элементы теории чисел». Тверь: ТвГУ, 2002.

## **VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

*Методические материалы позволяют обучающемуся оптимальным образом спланировать и организовать процесс освоения учебного материала. Методические материалы могут быть представлены в виде:*

- вопросов для подготовки к зачету/экзамену;
- электронных презентаций;
- рекомендаций по подготовке к разным видам учебных занятий (в т.ч. тематика, контрольные вопросы и задания для семинарских/практических занятий /лабораторных работ);
- рекомендаций по самостоятельной работе (темы, вопросы и т.д.);
- примерной тематики курсовых работ, рефератов, эссе и рекомендаций по их выполнению;
- иное.

*При наличии отдельно изданных методических пособий по дисциплине приводятся ссылки на ресурс или их выходные данные.*

*Важной составляющей данного раздела РПД являются требования к рейтинг-контролю с указанием баллов, распределенных между модулями и видами работы обучающихся (только для бакалавриата/специалитета).*

### **Планы практических занятий и методические рекомендации к ним**

#### **Задания для практических занятий**

#### **Раздел. Аксиоматическое построение множества целых неотрицательных чисел**

1. Используя 4-ю аксиому Пеано, докажите, что  $(\forall a, b \in \mathbb{N}) a + b \neq a$ .
2. Составьте и теоретически обоснуйте одну строку из таблицы сложения однозначных натуральных чисел, например:  $5 + 3 = 8$ .
3. Докажите, что  $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) a = b \Rightarrow ac = bc$   
Что это за утверждение?
4. Обоснуйте с точки зрения аксиоматической теории истинность следующих утверждений:

- а)  $5 < 7$ ;
- б)  $3 \times 7 > 3 \times 5$ .

5. Разделите с остатком:

- а) 37 на 5;
- б) 83 на 4;
- в) 32 на 3.

Выполните соответствующие записи.

6. Составьте и теоретически обоснуйте одну строку из таблицы умножения однозначных натуральных чисел, например:  $4 \times 3 = 12$ .

7. Обоснуйте с теоретико-множественных позиций истинность следующих утверждений:

- а)  $7 > 2$ ;
- б)  $3 + 7 > 3 + 6$ .

8. Запишите число 10 255 в виде суммы степеней 10. Как называется такая запись?

9. Представьте в виде краткой десятичной записи числа:

- а)  $6 \times 10^4 + 5 \times 10^2 + 8$ ;
- б)  $8 \times 10^3 + 10^2 + 1$ ;
- в)  $4 \times 10^4 + 10$ ;
- г)  $10^4 + 10^2$ .

10. Сделайте развернутую  $p$ -ичную запись чисел:

- а)  $3012_4$ ;
- б)  $2012_3$ ;
- в)  $761_8$ .

11. Выполните краткую  $p$ -ичную запись чисел:

- а)  $3 \times 5^3 + 2 \times 5 + 4$ ;
- б)  $2^4 + 2^3 + 2^2 + 1$ .

12. Переведите в 2-ю систему счисления числа:

- а) 27;
- б) 125;
- в) 11.

13. Переведите в 10-ю систему счисления числа:

- а)  $12_8$ ;
- б)  $201_3$ ;
- в)  $144_5$ .

14. Запишите в римской системе счисления числа:

- а) 193;
- б) 564;
- в) 2708.

15. Запишите в десятичной системе счисления числа:

- а) MDIII;
- б) MMMCCLV;
- в) CXLVII.

16. Дайте определение отрезка натурального ряда и запишите множества:

- а)  $N_3$ ;
- б)  $N_8$ ;
- в)  $N_{10}$ .

17. Является ли множество  $\{3, 4, 5, 6, 7\}$  отрезком натурального ряда? Ответ обоснуйте.

*Литература:*

1. *Стойлова Л.П. Математика. М., 2000.*
2. *Лаврова Н.Н., Стойлова Л.П. Задачник-практикум по математике. М., 1985.*
3. *Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. М., 1988.*

### Раздел. Множества и операции над ними

1. а)  $\{M: AM=BM\}$ , где А и В – фиксированные точки;
- б)  $\{M: OM \leq R\}$ , где О – фиксированная точка,  $R \in Z^0$ .
2. Укажите среди следующих множеств пустые:
  - а) множество прямоугольников с неравными диагоналями;
  - б) множество целых корней уравнения  $4x^2 - 1 = 0$ ;
  - в) множество натуральных корней уравнения  $2x^2 - 3x - 9 = 0$ .
3. Даны множества: трапеций (А), прямоугольников (В), четырехугольников (С), квадратов (D), параллелограммов (Е), многоугольников (F).
4. Запишите буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждая следующая обозначала подмножество предыдущего.
5. Верно ли утверждение: "Если два множества содержат одни и те же элементы, то они равны." Если неверно, то как его исправить?
6. Являются ли равными множества А и В, если
  - а) А – множество равноугольных треугольников, а В – множество равносторонних треугольников;
  - б)  $A = \{x | x \in Z\}$ ,  $B = \{x | x = 3n \pm 1, 3n, n \in Z\}$ .
7. О каких теоретико-множественных понятиях идет речь в следующих заданиях, выполняемых учащимися начальных классов:
  - а) запишите по порядку числа от 10 до 21. Подчеркните и прочитайте числа, которые делятся на 5;
  - б) из ряда чисел от 1 до 15 выпишите по порядку нечетные числа.
8. Проиллюстрируйте свойства ассоциативности и дистрибутивности операций объединения и пересечения множеств на кругах Эйлера.
9. Найдите пересечение множества четных натуральных чисел с множеством целых чисел, делящихся на 3.
10. Решите графически систему уравнений:
 
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$
11. Решите графически систему неравенств:

$$\begin{cases} y \geq x + 17 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

12.  $A=[1;6]$ ,  $B=[2;7]$ ,  $C=[-1;3]$ ,  $D=[2;5]$ . Найдите множества:

- а)  $A \cup B \cup C \cup D$ ; б)  $A \cap B \cap C \cap D$ ; в)  $A \cap B \cup C \cap D$ ; г)  $(A \cup B) \cap (C \cup D)$ ;  
 д)  $(A \cup B) \cap C \cup D$ .

13. Множество  $A$  состоит из учеников данного класса, знающих английский язык; множество  $N$  – из учеников, знающих немецкий язык; множество  $F$  – из учеников, знающих французский язык. Охарактеризуйте множества, если  $A \cap N \cap F \neq \emptyset$ :

- а)  $(A \cup N) \cap F$ ; б)  $A \cup N \cap F$ ; в)  $(A \cup N) \cap (N \cup F)$ .

14.  $A=[1;4]$ ,  $B=[2;6]$ . Найдите множество  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

15. Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера равенства:

- а)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ;  
 б)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ .

16.  $A=\{3, 4\}$ ,  $B=\{5, 6, 7\}$ . Найдите и сравните  $A \times B$  и  $B \times A$ .

17. Изобразите декартово произведение множеств  $A=[1;4]$  и  $B=[2;6]$  в декартовой прямоугольной системе координат.

18. Укажите разбиение множества всех четырехугольников на попарно непересекающиеся классы.

19. Образуют ли разбиение множества натуральных чисел следующие подмножества:

- а)  $A=\{x \mid x=6k+1, k \in \mathbb{Z}_0\}$ ; б)  $B=\{x \mid x=6k+3, k \in \mathbb{Z}_0\}$ ;  
 в)  $C=\{x \mid x=6k+5, k \in \mathbb{Z}_0\}$ ; г)  $D=\{x \mid x=6k, k \in \mathbb{N}\}$ . Почему?

20. Определите классы разбиения множества  $\mathbb{N}$ , если оно осуществляется при помощи свойств: «быть кратным 7», «быть кратным 35», «быть кратным 42». Изобразите отношения между множествами при помощи кругов Эйлера.

21. Определите классы разбиения множества четырехугольников при помощи свойств: «быть ромбом», «быть прямоугольной трапецией», «иметь угол  $30^\circ$ ». Проиллюстрируйте решение на кругах Эйлера.

22. Правильны ли следующие классификации:

- а) множество параллелограммов разбивается на подмножества прямоугольников, ромбов и квадратов;  
 б) натуральные числа делятся на однозначные, четные и нечетные;  
 в) треугольники бывают равнобедренными и неравнобедренными;  
 г) многоугольники могут быть правильными и неправильными.

*Литература:*

1. Лозгачева Т.А. Математика: множества, соответствия, утверждения: конспект лекций. ТвГУ, 2018.
2. Стойлова Л.П. Математика. М., 2000.
3. Лаврова Н.Н., Стойлова Л.П. Задачник-практикум по математике. М., 1985.
4. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. М., 1988.

## Раздел. Соответствия

1. Постройте графы и графики объединения и пересечения соответствий  $R = (\{1,3,5,7\}, \{2,4,6,8\}, \{(1;2), (1;4), (1;6), (1;8), (3;4), (3;6), (3;8), (5;6), (5;8), (7;8)\})$ ;  $P = (\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{(1;2), (3;2), (3;4), (5;4), (5;6), (7;6), (7;8)\})$ .
2. Укажите соответствия между элементами множеств  $X$  и  $Y$ , если
  - а)  $X$  – множество отрезков,  $Y$  – множество чисел;
  - б)  $X$  – множество треугольников,  $Y$  – множество окружностей.
3.  $X = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x < 10\}$ ,  $Y = \{y \mid y \in \mathbf{N}, y < 5\}$ ,  $R$ : "x:y". Постройте граф соответствия  $R^{-1}$ , обратного данному.
4.  $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{-2, 0, 1, 2\}$ ,  $\Gamma R = \{(-1;0), (-1;1), (-1;2), (0;0), (1;0), (2;0), (2;1), (2;2)\}$ :
  - а) постройте граф и график соответствия  $R$ ;
  - б) укажите область отправления, область прибытия, область определения и множество значений соответствия  $R$ .
5.  $X = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ ,  $R$ : "x:y". Постройте граф отношения  $R$ .
6. Выясните свойства отношения  $R$ : "быть родственником" на множестве людей.
7. Постройте граф отношения  $R$  на множестве  $X$ , если
  - а)  $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $R$ : "x делитель y";
  - б)  $X = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 10\}$ ,  $R$ : "x имеет ту же четность, что и y".
8. Во множестве людей заданы отношения:
  - а) человек  $x$  похож на человека  $y$ ;
  - б)  $x$  и  $y$  живут на одной улице;
  - в)  $x$  на 4 см выше  $y$ .Определите их свойства.
9. Приведите примеры упорядоченных числовых множеств, которые являются а) дискретными, б) плотными.
10.  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $R$ : "x < y". Постройте граф отношения  $R$ .
11.  $X$  – множество отрезков,  $R$ : "x длиннее y". Определите свойства отношения  $R$ .
12.  $X = \{-3, -4, 3, 4, 5, -5, -6, 6\}$ ,  $R$ : "x является модулем y". Постройте граф и график отношения  $R$ .

### Литература:

1. Лозгачева Т.А. Математика: множества, соответствия, утверждения: конспект лекций. ТвГУ, 2018.
2. Стойлова Л.П. Математика. М., 2000.
3. Лаврова Н.Н., Стойлова Л.П. Задачник-практикум по математике. М., 1985.
5. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. М., 1988.

## РАЗДЕЛ. Математические утверждения и их структура.

### Виды теорем

1. Проанализируйте структуру определений:
  - а) ромбом называется равносторонний параллелограмм;
  - б) пропорцией называется равенство двух отношений.
2. Каков объем понятия:
  - а) цифра,
  - б) однозначное число.
3. Выясните, какое утверждение верно:
  - а) всякое свойство прямоугольника присуще квадрату;
  - б) всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику.
4. Приведите примеры генетических определений.
5. Найдите и исправьте ошибки в следующих определениях:
  - а) биссектрисой треугольника называется прямая, делящая угол треугольника пополам;
  - б) касательной к окружности называется прямая, которая касается окружности;
  - в) сложением называется действие, при котором числа складываются;
  - г) равносторонним треугольником называется треугольник, у которого равны все его стороны и все его углы.
6. Из предложений "Треугольник ABC равнобедренный" и "Треугольник ABC равносторонний" образуйте составные при помощи слов "или", "если..., то".
7. Проанализируйте логическую структуру предложений:
8. а) число 13 простое и не делится на 2;
  - б) противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны;
  - в)  $\sqrt{4}=2$  или  $\sqrt{4}=-2$ .
9. Постройте отрицания следующих высказываний и укажите их значения истинности:
10. а) число 27 кратно 7; б)  $3+6=9$ ; в)  $38>44$ ; г)  $7\geq 7$ .
11. Сформулируйте отрицания следующих высказываний и установите, что истинно – само высказывание или его отрицание:
  - а) некоторые параллелограммы имеют центр симметрии;
  - б) диагонали любого ромба не равны между собой;
  - в) всякий прямоугольник является квадратом;
  - г) все числа положительны или отрицательны.
12. На множестве X треугольников даны предикаты:  
P(x): "треугольник x равносторонний",  
Q(x): "треугольник x равнобедренный",  
R(x): "треугольник x прямоугольный".  
Сформулируйте высказывания и установите их значения истинности:
  - а)  $(\forall x \in X)P(x)$ , б)  $(\exists x \in X)P(x)$ ,
  - в)  $(\exists x \in X)P(x) \wedge R(x)$ , г)  $(\exists x \in X)R(x) \wedge Q(x)$ .
15. На множестве Z даны предикаты:  
A(x): "x:2", B(x): "x:4", C(x): "x:3", D(x): "x:6", E(x): "x:12".  
Укажите, какие из нижеприведенных высказываний истинны, а какие ложны:

- а)  $(\exists x \in \mathbb{Z}) A(x) \wedge C(x) \vee B(x)$ ;    б)  $(\forall x \in \mathbb{Z}) A(x) \wedge B(x)$ ;  
 в)  $(\exists x \in \mathbb{Z}) C(x) \wedge B(x) \wedge A(x)$ ;    г)  $(\exists x \in \mathbb{Z}) C(x) \vee C(x)$ .

*Литература:*

1. Лозгачева Т.А. Математика: множества, соответствия, утверждения: конспект лекций. ТвГУ, 2018.
2. Стойлова Л.П. Математика. М., 2000.
3. Лаврова Н.Н., Стойлова Л.П. Задачник-практикум по математике. М., 1985.
4. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. М., 1988.

### Раздел. Расширение понятия числа

1. В чем состоит необходимость расширения понятия натурального числа?
2. Сформулируйте требования к расширению множества  $A$  до множества  $B$ .
3. Какое множество является 1-м расширением понятия числа?
4. Сформулируйте целевое требование 1-го расширения?
5. Что означает запись:  $m = (a; b)$ , где  $a, b \in \mathbb{N}$  ?
6. Запишите пары в традиционной форме записи целых чисел:
  - а)  $(2; 7)$ ;
  - б)  $(4; 4)$ ;
  - в)  $(6; 2)$ .
7. Дайте геометрическую интерпретацию множества целых чисел и его свойств.
8. Запишите в математических символах на основе теории пар:
  - а) законы сложения целых чисел;
  - б) законы умножения целых чисел;
  - в) свойство монотонности сложения целых чисел;
  - г) свойство монотонности умножения целых чисел.
9. Сравните по величине целые числа:
  - а)  $(2; 11)$  и  $(4; 1)$ ;
  - б)  $(5; 5)$  и  $(3; 1)$ .
10. Докажите, что для любой пары натуральных чисел  $(a; b)$  и  $\forall n, m \in \mathbb{N}$  выполняются соотношения:
  - а)  $(a; b) + (n; n) \sim (a; b)$ ;
  - б)  $(a; b) \times (n; n) \sim (m; m)$ ;
  - в)  $(a; b) \times (n+1; n) \sim (a; b)$ .
11. Прочитайте предложение:  $n(A) = 17$ . В какой роли здесь выступает число 17?
12. Дайте теоретико-множественное толкование числам:
  - а)  $-120$ ;
  - б)  $0$ ;
  - в)  $5$ .
13. Из нижеуказанных множеств отметьте знаком «+» те, которые являются подмножествами множества целых чисел:

$$\text{а) } A = \left\{ 0; -3; -\frac{4}{3}; \frac{32}{16} \right\};$$

$$\text{б) } B = \left\{ \frac{n}{2}, \text{ где } n \in Z \right\};$$

$$\text{в) } D = N \cup Z \cup \{0\};$$

$$\text{г) } E = \left\{ y = x, \text{ если } x \in Z_+ \right\}.$$

*Литература:*

1. Стойлова Л.П. Математика. М., 2000.

2. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. М., 1988.

### **Раздел. Величины и их измерение**

1. Следует ли из равносторонности двух прямоугольников: а) равенство этих прямоугольников; б) их равновеликость?

2. Существуют ли многоугольники, из равносторонности которых следует их равенство?

3. Могут ли быть равновеликими: а) два неравных прямоугольника, имеющие по равной стороне; б) два неравных треугольника, которые имеют по две соответственно равные стороны?

4. Трапеция своими диагоналями разделена на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

5. Как изменится площадь квадрата, если увеличить его диагональ в  $n$  раз?

6. Периметр прямоугольника равен 28 см, а разность смежных сторон равна 2 см. Определите длину диагонали и площадь прямоугольника.

7. Как построить квадрат, площадь которого в 2 раза больше площади данного квадрата?

8. Даны квадрат и произвольный прямоугольник, диагонали которого равны диагоналям квадрата. Площадь какой из этих фигур больше? Почему?

9. Как известно, площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Рассуждая по аналогии, учащийся предположил, что этим правилом можно воспользоваться и для вычисления площади трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, а также для вычисления площади произвольного четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями. Верно ли это предположение?

10. Будут ли равновеликими прямоугольники, если сторонами одного из них являются катеты прямоугольного треугольника, а сторонами другого — гипотенуза и опущенная на нее высота?

11. Установите, какие величины рассматриваются в задаче, в каких отношениях они находятся и какие выполняются над ними действия, решите задачу:



а) Сад и огород имеет форму прямоугольника, площадь каждого из них равна  $1500 \text{ м}^2$ . Ширина сада на  $5 \text{ м}$  больше ширины огорода, а длина сада на  $10 \text{ м}$  меньше длины огорода. Найдите размеры сада и огорода.

б) При постройке здания требовалось вынуть  $4500 \text{ м}^3$  в определенный срок. Перевыполняя дневную норму на  $45 \text{ м}^3$ , строители уже за  $4$  дня до срока выполнили  $96\%$  задания. Определите сроки работы.

в) Отправляясь в путешествие, турист рассчитывал истратить в дороге  $72 \text{ р.}$  В течение первых  $5$  дней его расходы совпадали с расчетными, затем он стал расходовать в день в среднем на  $1 \text{ р.}$  больше, чем предполагал, и, задержавшись в пути на  $1$  день, вернулся домой, истратив на все путешествие на  $23 \text{ р.}$  больше, чем намечал. Сколько дней продолжалось путешествие?

г) Две машинистки получили для перепечатки рукопись. После  $2 \text{ ч}$  совместной работы одна из машинисток получила другое задание и вторая, оставшись одна, закончила работу через  $1 \text{ ч } 20 \text{ мин.}$  За сколько часов могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка, если второй на это понадобилось бы на  $1 \text{ ч } 10 \text{ мин}$  больше, чем первой?

д) Мотоциклист предполагал проехать расстояние  $90 \text{ км}$  за определенное время. Проехав  $54 \text{ км}$ , он должен был остановиться у закрытого шлагбаума на  $5 \text{ мин.}$  Продолжая движение, он увеличил скорость на  $6 \text{ км/ч}$  и прибыл к месту назначения в намеченное время. Найдите первоначальную скорость мотоциклиста.

*Литература:*

1. Стойлова Л.П. Математика. М., 2000.

2. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. М., 1988.

## Раздел. Функции, уравнения, неравенства

### Понятие числовой функции

1. Задайте при помощи графа соответствие между множествами  $X = \{a, b, c\}$  и  $Y = \{2, 4, 6\}$  так, чтобы оно было взаимнооднозначным.

2. Какие из следующих формул задают на множестве  $\mathbb{R}$  (действительных чисел) функцию:

а)  $y = 7x$ ; б)  $y = \frac{5}{x}$ ; в)  $x^2 + y^2 = 25$ ?

3. Постройте график функции  $y = 7 - x$ , если её область определения  $X$  такова:

а)  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ;

б)  $X = [0; 7]$ ;

в)  $X = \mathbb{R}$ .

4. Даны функции  $f(x) = x^2$  и  $\varphi(x) = x^3$ . Вычислите  $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$ , при  $a = -1$ ,

$b = 3$ , предварительно упростите.

5. Для функции  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$  вычислите  $f(0)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(x-2)$ .

6. Найдите область определения и множество значений функций:

а)  $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}$ ; б)  $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ ; в)  $y = \frac{x}{\sqrt{x-4}}$ .

7. Исследуйте функции на чётность и нечётность:

а)  $y = \frac{x}{1+x^2}$ ; б)  $y = 3,5x$ ; в)  $y = 2x^2$ .

8. Укажите числовой промежуток, в котором функция  $y = \sqrt{x^2 - 4x - 12}$  не существует.

## Прямая и обратная пропорциональности

### Линейная функция

1. Известно, что функция  $f$  является прямой пропорциональностью и задана на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  и при  $x=3$  значение функции равно 12.

а) Задайте функцию  $f$  при помощи формулы и таблицы; постройте её график.

б) Какие свойства функции  $f$  можно проиллюстрировать при помощи таблицы и графика?

в) Какие из названных свойств можно использовать, решая задачу: «12 кг муки разложили поровну в 3 пакета. Сколько килограммов муки можно разложить в 6 таких пакетов?»

2. Известно, что функция  $\phi$  является обратной пропорциональностью, задана на множестве  $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  и при  $x=5$  значение функции  $\phi$  равно 6.

а) Задайте функцию  $\phi$  при помощи формулы и таблицы; постройте её график.

б) Какие свойства функции  $\phi$  можно проиллюстрировать при помощи таблицы и графика?

в) Какие из названных свойств можно использовать, решая задачу: «Муку разложили в 10 пакетов по 3 кг в каждый. Сколько нужно пакетов, если бы в каждый пакет положили 6 кг муки?»?

3. Постройте схематически график функции  $y = kx + b$  при

а)  $k > 1, b = 0$ ;

б)  $0 < k < 1, b < 0$ .

4. Определите коэффициент пропорциональности функции  $y = kx + b$  и параметр  $b$ , если:

а)  $5x - 3y + 15 = 0$ ;

б)  $3x + 2y = 6$ ;

в)  $x - 2y = 0$ .

5. В одной системе координат постройте схематически графики функций  $y = x + 3$ ;  $y = -2x + 3$ ;  $y = 3x + 3$ . Обоснуйте особенности их взаимного расположения.

### Квадратичная функция

1. Определите, при каком значении параметра  $c$  график функции  $y = 2x^2 + 7x + c$  проходит через точку  $A(-10; 150)$ .

2. Определите, при каком значении параметра  $b$  график функции  $y = x^2 + bx - 14$  проходит через точку  $D(-11; -30)$ .

3. Известно, что график функции  $y=ax^2+bx-48$  проходит через точки  $M(1;2)$  и  $N(2;10)$ . Найдите значения коэффициентов  $a$  и  $b$ .

### Числовое выражение и его значение

#### Числовые равенства и неравенства

1. Среди следующих записей укажите числовые выражения:

а)  $96:16$ ; б)  $47$ ; в)  $27+(-3)$ ; г)  $15\cdot4=10\cdot5$ ; д)  $13-4>(24-18):3$ ;

е)  $(17+83):10-10$ .

2. Существуют ли числовые значения следующих числовых выражений на множестве  $Z$ :

а)  $(25:5)+(9:3)-8$ ; б)  $(17:2)-8$ ; в)  $48:4-14$ ; г)  $(16\cdot2)-(15:5)\cdot7$ ?

3. Какие из следующих выражений имеют значения на множестве  $R$ , а какие нет:

а)  $\frac{5,6\cdot2,1-11,6}{(5-3\frac{2}{3})\cdot6-7,9}$ ; б)  $\frac{8,3\cdot1,2+4,2}{(3\frac{3}{5}-2\frac{1}{15})\cdot5-7\frac{2}{3}}$ ?

4. Укажите порядок действий и дайте название каждому выражению, найдите значение выражений:

а)  $(\frac{1}{2}+0,125-1)\cdot(6,4:\frac{80}{3})+(1:8)$ ;

б)  $(\frac{3}{5}-0,8):2\frac{2}{5}-(0,25-\frac{7}{8}):2\frac{3}{4}$ ;

в)  $(\frac{3\frac{1}{3}+2,5}{2,5-1\frac{1}{3}}\cdot\frac{4,6-2\frac{1}{3}}{4,6+2\frac{1}{3}})+5,2:(\frac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125}+5,7)$ .

5. Среди следующих записей укажите числовые равенства:

а)  $5y-3=12$ ; б)  $47-78\cdot5=76+(67-38):2$ ; в)  $7,8\cdot(12-3,8)+95,95:19$ ;

г)  $57-31=$ .

6. Определите, истинны ли числовые равенства:

а)  $95,95:19-17,5:5=\frac{8}{3}-\frac{4}{6}$ ;

б)  $\frac{\sqrt{(0,0025+2)^2-8\cdot0,0025}}{\sqrt{0,0025}-\frac{2}{\sqrt{0,0025}}}=0,05$ .

7. Запишите нижеприведённые высказывания в виде равенств:

а) 13 меньше 17 на 4; б) 3 меньше 10 на 7;

в) 11 больше  $20:2$  на 1; г) 6 больше  $\frac{2}{3}\cdot6$  на 2.

8. Известно, что  $6:2=9:3$  – истинное числовое равенство. При каких значениях  $a$  будут истинны следующие числовые равенства:

а)  $6:2+a=9:3+a$ ; б)  $6:2-a=9:3-a$ ; в)  $6:2\cdot a=9:3\cdot a$ ; г)  $6:2:a=9:3:a$ .

9. Среди следующих записей укажите числовые неравенства:

а)  $7x-5>17+8$ ; б)  $23-38>11:17$ ; в)  $5x<7y$ ; г)  $25-14:2<18:2+5$ .

10. Составьте истинное числовое неравенство из выражений:

- а)  $2 \cdot 2 - 3$  и  $5 - 4 \cdot (2 - \frac{1}{2})$ ;  
 б)  $2 \cdot 8^2 + 16 \cdot 8 - 3$  и  $2 \cdot (8^2 + 8 \cdot 8)$ ;  
 в)  $2 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 11$  и  $(-3)^2 + (-3) + 1$ ;  
 г)  $(-3 - 2)^2$  и  $20 - 3 \cdot (-2)$ .

11. Умножьте обе части неравенства на множитель, указанный в скобках:

- а)  $27 < 32$  (-4); б)  $17 > 9$  (3); в)  $9 > 7$  (0); г)  $7 > 0$  (-3); д)  $5 > -3$  (3).

12. Известно, что  $a > b$  – истинное неравенство. Будут ли истинными следующие неравенства:

- а)  $-3a > -3b$ ; б)  $\frac{2}{5}a < \frac{2}{5}b$ ; в)  $3a - 5 > 3b - 5$ ; г)  $-3a + 7 < -3b + 7$ ?

13. Решите задачу. Решение запишите в виде выражения:

а) Сколько стоят 12 карандашей, если известно, что 6 таких карандашей стоят 18 рублей?

б) Теплоход шёл против течения реки 4 часа. Какое расстояние он прошёл, если собственная скорость теплохода 16 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч?

14. Как в начальном курсе математики трактуется понятие числового равенства и неравенства? Выполните задания, предназначенные для младших школьников:

а) запишите два верных равенства и два верных неравенства, используя выражения:  $12:4$ ;  $17 - 12$ ;  $17 - 14$ ;  $30:6$ ;

б) расставьте скобки так, чтобы равенства стали верными:  $4 + 2 \cdot 3 = 18$ ;  $31 - 10 - 3 = 24$ ;  $54 - 12 + 8 = 34$ ;

в) поставьте вместо \* знаки действий так, чтобы получились верные неравенства:

$$3 * 6 * 2 > 8; \quad 9 * 3 * 6 < 20.$$

15. Какие ответы учеников вы будете считать правильными при выполнении ими задания: «Сравните выражения, не вычисляя их значения»:

а)  $50 \cdot 31 + 8 \cdot 31 \dots 58 \cdot 30 + 58$ ;

б)  $7 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \dots (7 + 8) \cdot 4$ ;

в)  $8500 : 1700 \dots 8500 : 100 : 17$ ;

г)  $24 \cdot 6080 \dots (6000 + 80) \cdot 24$ ?

### Выражения с переменной. Уравнения с одной переменной

1. Среди следующих записей укажите выражения с переменными и уравнения:

а)  $5x - 7y = 3$ ; б)  $5x - 7y - 3$ ; в)  $4(y - 2) + 31$ ; г)  $5x^2 - 6 = 13x$ ;

д)  $48 : 4 - 3 = 3 \cdot 6 - 9$ .

2. При каких значениях  $z$  не имеют смысла следующие выражения:

а)  $\frac{13z}{3z + 6}$ ; б)  $\frac{3z - 7}{z^2 - 5z + 6}$  ?

3. Укажите множество значений переменной  $y$ , при которых выражение имеет смысл:

а)  $\frac{7 - y}{y + 9}$ ; б)  $\frac{y^2 + 9}{y^2 - 9}$ ; в)  $\frac{12}{(y - 1)(y - 3)(y + 7)}$ .

4. Являются ли выражения  $\frac{a^2-4}{a-2}$  и  $a+2$  тождественно равными на а) множестве  $\mathbb{R}$ ; б) множестве  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ; в) множестве  $\mathbb{N}$ ?

5. При каких значениях  $x$  являются тождественными следующие выражения:

а)  $17x-8+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-3}$  и  $17x-8$ ; б)  $\frac{(2x-3)(x+5)}{x+5}$  и  $2x-3$ ;

в)  $\frac{x^2-4}{x-2}-\frac{x^3-8}{x^2-4}$  и  $\frac{2x}{x+2}$ .

6. Докажите тождество. Укажите условие тождественности.

а)  $\frac{a^6+64}{a^4-4a^2+16}=8+\frac{a^4-16}{a^2+4}$ ; б)  $\frac{27-27a+9a^2-a^3}{a^2-6a+9}=3-a$ ;

в)  $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}=x+1$ .

7. Объясните, почему число 2 является решением уравнения

$2x-3+4(x-1)=5$  и не является решением уравнения

$2x-3+2(x-1)=4(x-1)-7$ .

8. Найдите множество решений уравнения  $\frac{4}{x}+5=\frac{1}{x^2}$  на  $\{-1;0,2\}$ , если

а)  $x \in \mathbb{R}$ ; б)  $x \in \mathbb{N}$ ; в)  $x \in \mathbb{Q}$ ; г)  $x \in \mathbb{Z}$ .

9. Уравнение задано на множестве  $\mathbb{R}$ . Решите его, используя теоремы о равносильности уравнений. Обоснуйте все преобразования, выполняемые в процессе решения уравнения:

б)  $\frac{x-1}{2}=\frac{3-x}{2}+\frac{x-2}{3}$ .

10. Решите задачу алгебраическим способом:

«В трёх корзинах 54 кг яблок. В первой корзине на 12 кг яблок меньше, чем во второй, а в третьей – в 2 раза больше, чем в первой. Сколько килограммов яблок в каждой корзине?».

11. Решите уравнения:

а)  $2x^2-7x+6=0$ ; б)  $\frac{x^3-27}{x-3}=27$ ; в)  $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}=4$ .

### Неравенства с одной переменной

1. Среди следующих записей укажите неравенства с одной переменной:

а)  $14-7x < 4x-3$ ; б)  $19(y-3) > 7$ ; в)  $2 \cdot 27-39-11 > 53:(21-50)$ ; г)  $93+63x$ ;  
д)  $5x^4-523x < 21$ ; е)  $73m-21m \geq 12$ .

2. Является ли число 2 решением неравенства:

$\frac{x+2}{3-x} > 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ? А число 3? А число 1?

3. Найдите длины интервалов, на которых выполняются неравенства:

а)  $\frac{2x^2+16x-3}{x^2+8x} > 2$ ; б)  $\frac{x-1}{x+5} \geq 2$ ; в)  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{3}$ .

4. Найдите наименьшие целые решения неравенств:

а)  $4x^2+4x+1 \leq 0$ ; б)  $\frac{x+2}{3-x} > 2$ ; в)  $\frac{x^2+6x}{4-3x-x^2} \geq 0$ .

5. Следующие неравенства заданы на множестве действительных чисел. Решите их и обоснуйте все преобразования, выполняемые в процессе их решения.

а)  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x}$ ; б)  $3(x-2) - 4(x+1) < 2(x-3) - 2$ .

6. Даны пары неравенств:

а)  $\frac{2x}{x+4} > \frac{8}{x+4}$  и  $2x > 8$ ; б)  $\frac{3x+5}{x-3} > 1$  и  $3x+5 > x-3$ .

Укажите, на основе какого преобразования 2-е неравенство получено из 1-го. Могут ли эти преобразования привести к нарушению равносильности на множестве  $\mathbb{N}$ , на множестве  $\mathbb{R}$ ?

7. Не решая неравенств, укажите множества, на которых равносильны следующие пары неравенств:

а)  $5x^2 < 1000$  и  $x < 2$ ; б)  $\frac{x-5}{2x^2+3} > 0$  и  $x-5 > 0$ ; в)  $\frac{4x-4}{x-7} < 1$  и  $4x-4 > x-7$ .

8. Одна сторона прямоугольника — 10 см. Какой может быть длина второй стороны, если периметр прямоугольника меньше 50 см?

9. Изобразите на числовой оси множества точек:

а)  $X = \{x | x < -7\}$ ;

б)  $Y = \{y | x \in \mathbb{R}, x \geq 15,2\}$ ;

в)  $Z = \{z | x \in \mathbb{N}, -1 \leq z < 6,5\}$ .

10. Укажите множество значений переменной  $t$ , при которых выражение имеет смысл:

а)  $\frac{3t+6}{(t+2)(t^2+6t+9)}$ ; б)  $\frac{5t^3-t}{t^2+7t+12}$ .

### Уравнения и неравенства с модулем

1. Решите уравнения:

а)  $|x+4|=2x$ ; б)  $|3x+1|=9-x$ ; в)  $|x+5|=|10+x|$ ; г)  $|x+3|=|2x-1|=8$ .

2. Какие из следующих уравнений имеют решение, а какие нет:

а)  $|x-5|=3$ ; б)  $|x-5|=-3$ ; в)  $|x|=|2x-5|$ ; г)  $|x+5|+|3x-4|=-8$ ?

3. Решите уравнения: а)  $|x^2+x|+3x-5=0$ ; б)  $x^2+|x-2|-10=0$ .

4. Решите неравенства и укажите наименьшее целое положительное решение для каждого из них: а)  $|x|<5$ ; б)  $|x-4|<3$ ; в)  $|x+2|>1$ .

5. Какие из следующих неравенств имеют решение, а какие нет:

а)  $|x-7|<0$ ; б)  $|x-8|\leq 0$ ; в)  $|x+5|>-2$ ; г)  $|x-3|<-1$ ; д)  $|5-2x|<-2$ ; е)  $|2x-9|<0$ ?

6. Решите неравенства и укажите наименьшие целые положительные решения для каждого из них:

а)  $x^2 - |5x+6| > 0$ ; б)  $|x^2+5x| < 6$ ; в)  $|x-2|+|x+2| \leq 4$ ; г)  $|3+x| \geq x$ .

### Уравнение и системы уравнений с двумя переменными. Уравнение линии. Уравнение окружности

1. Путём подбора найдите несколько решений каждого из следующих уравнений: а)  $x - y = 7$ ; б)  $y = 5x$ ; в)  $3x - 2y = 16$ .

2. Найдите пары чисел, разность которых равна 15. Сколько решений имеет задание?

3. Решите задачу: «Девочка купила в магазине книгу за 30 коп. и открытку за 7 коп. У неё с собой были только трёх копеечные и пяти копеечные монеты. Сколько тех и других монет девочка должна была дать в кассу за свою покупку?»

4. Даны два уравнения:  $x+y=9$  и  $x-y=1$ . Найдите пару чисел, которая

а) является решением 1-го уравнения, но не является решением 2-го;

б) является решением 2-го уравнения, но не является решением 1-го;

в) не является решением ни первого, ни второго.

5. Выясните, равносильны ли на множестве  $\mathbb{R}$  следующие системы уравнений:

а)  $\begin{cases} x-y=2, \\ 3x-2y=9 \end{cases}$  и  $\begin{cases} \delta-\acute{o}-2=0, \\ 3\delta-2\acute{o}-9=0; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x-y=2, \\ 3x-2y=9 \end{cases}$  и  $\begin{cases} (\delta^2-4)(\delta-\acute{o})=2(\delta^2-4), \\ 6\delta-4\acute{o}=18. \end{cases}$

6. Среди множества решений  $(x;y)$  системы найдите то, для которого сумма  $(x+y)$  максимальна. Вычислите значение этой суммы.

$$\begin{cases} 2\delta+\acute{o}=7, \\ \delta\acute{o}=6. \end{cases}$$

7. При каких значениях параметра  $a$  системы не имеют решений?

а)  $\begin{cases} \delta+\acute{o}=1, \\ \delta-3\acute{o}=2a+3; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} \delta+\acute{o}=1, \\ \acute{o}-\delta=2a. \end{cases}$

8. При каких значениях параметра  $a$  системы уравнений имеют бесконечно много решений?

а)  $\begin{cases} 3x+ay=3, \\ ax+3y=3; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} (a+1)x-y=a+2, \\ x+(a-1)y=2. \end{cases}$

9. Решите системы уравнений:

а)  $\begin{cases} 2x+3y=15, \\ x-2y=3; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x+2y=4, \\ x^2-4y^2=0; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} x+y=3, \\ xy+x^2=3. \end{cases}$

10. Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12. \end{cases}$$

11. 10. Решите системы уравнений графическим способом с помощью онлайн-калькулятора WolframAlpha <http://www.wolframalpha.com>:

$$\begin{cases} x-y=2, \\ 3x-2y=9 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y=15, \\ x-2y=3; \end{cases}$$

12.. Решите задачу составлением уравнения:

« $\frac{5}{8}$  суммы двух чисел без их разности составляет 16, а полуразность этих чисел, умноженная на 8, равна их полусумме. Найдите эти числа».

**Системы и совокупности неравенств с одной переменной**

1. Установите, какие из следующих записей являются неравенствами с одной переменной:

а)  $15(x+3)>5$ ; б)  $19 - 7 \cdot 6$ ; в)  $3x^2 - 2x+4>0$ ; г)  $13(11+8)<12 - 5$ ; д)  $7x - 2(x - 3)$ .

2. Почему число 3 не является решением неравенства:

$6(2x+7)<15(x+2)$ , где  $x \in \mathbb{R}$ ?

3. Равносильны ли на множестве  $\mathbb{R}$  следующие пары неравенств:

а)  $\frac{2x+2}{x+5}<1$  и  $2x+2>x+5$ ; б)  $-13x<39$  и  $x>3$ ; в)  $x^2+3x - 2>2$  и  $4x^2+3x - 4>0$ ;

г)  $5 - 3x> - 4$  и  $x<3$ ; д)  $\frac{x-3}{x^2+1}>0$  и  $x-3>0$ ?

4. Докажите, что не существует действительного числа, которое бы являлось решением неравенства:

$3(2 - x) - 2>5 - 3x$ .

5. Решите неравенство  $\frac{7-9x}{4} + \frac{3}{2}x - 6 < \frac{x-1}{8} + 2$  и обоснуйте все преобразования, которые производили в процессе решения.

6. Одна сторона треугольника равна 5 см, а другая 8 см. Какой может быть длина третьей стороны, если периметр треугольника: а) меньше 22 см;

б) больше 17 см?

7. Изобразите на числовой прямой множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим условиям: а)  $X = \{x \mid x \geq -4\frac{1}{3}\}$ ;

б)  $X = \{x \mid -5, 1 \leq x \leq -3, 2\}$ ; в)  $X = \{x \mid -3 \leq x \leq 11, 2\}$ .

8. Решите системы неравенств:

а)  $\begin{cases} 5\delta - 2 \geq 2\delta + 1, \\ 2\delta + 3 > 18\delta - 3; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 0,3\delta - 4 + \delta < 7,2 - 8\delta, \\ 2\delta - 7 - 0,2\delta \leq (8\delta - 5) \cdot 0,3. \end{cases}$

9. Решите совокупности неравенств:

а)  $\begin{cases} 9(\delta - 7) < 12\delta + 9, \\ 3\delta + 14 > 48 - 5(\delta + 2); \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 8 - 3\delta < \frac{4 + \delta}{3} + 1, \\ 7 + 5\delta < 8\delta + 4. \end{cases}$

10. Найдите множества решений неравенств:

а)  $|x - 7| < 14$ ; б)  $|6 - 7x| \leq 3$ ; в)  $|2x - 9| \geq -1$ .

11. Найдите множества истинности следующих конъюнкций неравенств и изобразите их на числовой оси:

а)  $(x < 9) \wedge (x > 4)$ ; б)  $(x - 8) \wedge (x \geq -10)$ .

12. Найдите множества истинности следующих дизъюнкций неравенств:

а)  $(x < 9) \vee (x > 5)$ ; б)  $(x > -10) \vee (x > 0) \vee (x > 5)$  и изобразите их на числовой оси.

13. Найдите области определения следующих выражений:

а)  $\frac{\sqrt{x-2}}{4+x}$ ; б)  $\sqrt{x(x-9)}$ ; в)  $\sqrt{\frac{4-x^2}{x+3}}$ .

### Неравенства и системы неравенств с двумя переменными и их графическое решение

1. Найдите три каких-либо решения неравенства:

а)  $y > 3x - 0,5$ ; б)  $y \leq x^2 + 1$ ; в)  $y + x - 1 > 0$ .



2. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, задаваемое неравенством: а)  $y \leq 2x - 8$ ; б)  $y \geq -x - 6$ ; в)  $y \geq \frac{6}{x}$ ; г)  $y \geq 0,5x^2$ .

3. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых являются решением неравенства: а)  $x^2 + y^2 \leq 25$ ; б)  $x^2 + y^2 > 4$ .

4. Пусть  $F$  — множество точек координатной плоскости, задаваемое системой неравенств: 
$$\begin{cases} y \leq x + 4, \\ y \geq x - 4. \end{cases}$$

Принадлежат ли этому множеству точки  $A(0;5)$ ,  $B(-1;3)$ ,  $C(-20;20)$ ?

5. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системам неравенств:

а)  $\begin{cases} y \geq 2x + 6, \\ y \leq -2x + 6. \end{cases}$  ; б)  $\begin{cases} y > x + 2, \\ y > -x + 2, \\ y < 5. \end{cases}$

6. Решите системы неравенств графическим способом:

а)  $\begin{cases} \delta > \delta + 2, \\ \delta < 2\delta - 3; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} y > x^2 - x - 6, \\ y < 3x - 1. \end{cases}$

*Литература:*

1. Кулагина Г.А., Толстихина Г.А. *Алгебраические понятия в содержании дисциплины «Математика»: учеб. пособие. Тверь, 2008.*

2. Лаврова Н.Н., Стойлова Л.П. *Задачник-практикум по математике. М., 1985.*

## РАЗДЕЛ 6.

### Геометрические понятия в начальном курсе математики

#### Тема. Геометрические преобразования плоскости

Практические занятия №1-2. Понятие преобразования множества. Движения плоскости. Частные виды движений. Параллельный перенос: определение и свойства. Поворот: определение и свойства поворота. Центральная симметрия: определение, свойства, связь с поворотом.

Практическое занятие №3. Осевая симметрия относительно прямой. Построение образов фигур при движении.

Литература: основная [3] § 23, 24 п.116; дополнительная [3]

#### Тема. Элементы теории геометрических построений на плоскости с помощью циркуля и линейки

Практическое занятие №4. Простейшие и основные построения.

Практическое занятие №5. Методы решения задач на построение: метод геометрических мест точек

Практическое занятие №6. Методы решения задач на построение: метод преобразований.

Практическое занятие №.7. Методы решения задач на построение: алгебраический метод.

Литература: основная [3] § 22; дополнительная [3]

***Методические рекомендации  
по организации самостоятельной работы студентов***

**1. Рекомендации по использованию материалов  
рабочей программы дисциплины**

Для подготовки к практическим занятиям рекомендуется использовать соответствующие методические указания. Проанализируйте имеющиеся варианты контрольных вопросов, тестов, заданий и т.д.

**2. Рекомендации по работе с учебной и научной литературой**

Для изучения курса необходимы учебные пособия из списка основной литературы. Дополнительная литература используется при самостоятельном изучении отдельных тем, предусмотренных учебной программой.

**3. Рекомендации по подготовке к практическим занятиям  
Глоссарий**

Ниже перечисленные понятия разделов дисциплины «Математика» см. в курсе лекций и учебных пособиях.

***Раздел. Аксиоматическое построение множества целых  
неотрицательных чисел***

**1. Понятие об аксиоматическом методе построения теории.**

Аксиоматическое построение множества целых неотрицательных чисел.

Термины:

- основные понятия (основные объекты и основные отношения)
- аксиома
- теорема
- полная индукция
- неполная индукция

Понятия:

- множество
- число
- отношение «непосредственно следовать за...»

Определения:

- множества натуральных чисел
- натурального числа
- отношения «предшествует»
- сложения натуральных чисел
- умножения натуральных чисел
- отношения «меньше» на множестве натуральных чисел
- разности натуральных чисел

- частного натуральных чисел
- деления с остатком
- множества целых неотрицательных чисел

Законы:

- сложения натуральных чисел
- умножения натуральных чисел

Правила:

- вычитания суммы из числа
- вычитания числа из суммы
- вычитания числа из разности
- вычитания разности из числа
- прибавления разности к числу
- деления суммы на число
- деления произведения на число 25

Обозначения:

- числа, непосредственно следующего за натуральным числом  $a$
- множества натуральных чисел
- принадлежности элемента множеству

Теоремы:

- существования и единственности сложения натуральных чисел
- существования и единственности умножения натуральных чисел
- существования и единственности разности натуральных чисел
- существования и единственности частного натуральных чисел
- существования и единственности деления с остатком

Свойства:

- отношения «непосредственно следовать за ...»
- отношения «предшествует»
- множества натуральных чисел
- отношения «меньше» на множестве натуральных чисел

Методы:

- метод математической индукции для доказательства утверждений
- метод полной индукции для доказательства утверждений

Алгоритмы:

- составления таблиц сложения однозначных натуральных чисел
- составления таблиц умножения однозначных натуральных чисел

Теория:

- аксиоматическая теория натурального числа

***Системы счисления: позиционные и непозиционные. Алгоритмы арифметических действий.***

Термины:

- система счисления
- разрядная единица
- основание системы счисления

Понятия:

- непозиционная система счисления
- позиционная система счисления

Определения:

- системы счисления
- десятичной записи натурального числа
- основания системы счисления

Обозначения:

- краткой десятичной записи натурального числа в общем виде
- цифр в римской системе счисления
- краткой записи числа в  $p$ -ичной системе счисления

Теорема:

- существования и единственности десятичной записи натурального числа

Формулы:

- развернутая десятичная запись натурального числа
- развернутая запись натурального числа в  $p$ -ичной системе счисления

Алгоритмы:

- сложения и вычитания многозначных чисел в 10-й системе счисления
- умножения и деления многозначных чисел в 10-й системе счисления
- составления таблиц сложения и умножения однозначных чисел в  $p$ -ичной системе счисления
- выполнения арифметических действий в  $p$ -ичной системе

### ***Раздел. Множества и операции над ними. Соответствия.***

#### 1. Множества и операции над ними

- Множество
- Подмножество
- Универсальное множество
- Равные множества
- Пустое множество
- Круги Эйлера
- Классы множеств
- Объединение множеств
- Пересечение множеств
- Разность множеств. Дополнение множества.

#### 2. Соответствия

- Область отправления
- Область прибытия
- Граф соответствия

- График соответствия
- Обратное соответствие
- Образ элемента
- Прообраз элемента
- Взаимно однозначное соответствие
- Мощность
- Счетное множество
- Эквивалентные множества

***Раздел. Теоретико-множественный смысл целого неотрицательного числа и операций над числами***

Термины:

- порядковое натуральное число
- количественное натуральное число
- конечное множество

Определения:

- отрезка натурального ряда
- конечного множества
- натурального числа с теоретико-множественных позиций
- числа 0 с теоретико-множественных позиций
- отношения «равно» и «<» с теоретико-множественных позиций
- действий сложения, вычитания, умножения и деления с теоретико-множественных позиций

Законы:

- сложения и умножения целых неотрицательных чисел

Обозначение:

- отрезка натурального ряда

Свойство:

- отношения «<» с теоретико-множественных позиций

Теория:

- теоретико-множественная теория натурального числа счисления

***Раздел. Математические утверждения и их структура.  
Виды теорем***

–

**3. Математические утверждения и их структура**

- Понятие
- Высказывание
- Предикат
- Кванторы

**4. Виды теорем**

- Необходимое условие
- Достаточное условие
- Обратная теорема

- Противоположная теорема
- Доказательство

### ***Раздел. Делимость натуральных чисел***

#### Термины:

- делимость
- делитель данного числа
- кратное двух и более чисел
- наибольший общий делитель
- наименьшее общее кратное
- каноническое разложение натурального числа

#### Определения:

- отношения делимости на множестве натуральных чисел
- простого числа
- составного числа
- взаимно простых чисел
- делителя данного числа
- кратного двух или более чисел
- наибольшего общего делителя (НОД)
- наименьшего общего кратного (НОК)
- канонического разложения натурального числа

#### Правила:

- делимости суммы, разности, произведения натуральных чисел на данное натуральное число

#### Обозначения:

- отношения делимости
- делителя данного числа  $a$
- кратного чисел  $a$  и  $b$
- канонического представления натурального числа

#### Теоремы:

- делимости суммы, разности, произведения натуральных чисел на натуральное число
- неделимости суммы нескольких чисел на натуральное число
- признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 11, 25
- признаки делимости на составные числа
- существования НОД двух чисел
- существования простого делителя
- о бесконечности множества простых чисел (теорема Евклида)
- основная теорема арифметики
- о связи между НОД и НОК

#### Свойства:

- отношения делимости
- основное свойство НОД
- 1-е и 2-е свойства взаимно простых чисел

#### Формулы:

- деления суммы, разности, произведения натуральных чисел на данное натуральное число

Алгоритмы:

- Евклида нахождения НОД двух чисел
- «решето Эратосфена» поиска простых чисел.
- нахождения НОД, НОК нескольких чисел с помощью их канонических разложений, бинарного алгоритма

### *Раздел. Расширение понятия числа*

#### 1. Первое расширение понятия числа. Целые числа.

Термин:

- расширение понятия числа

Понятие:

- первое расширение множества натуральных чисел

Определения:

- целого числа
- равенства пар
- отношения « $>$ » на множестве целых чисел
- суммы целых чисел
- разности целых чисел
- произведения целых чисел
- абсолютной величины целого числа
- эквивалентных пар

Законы:

- сложения и умножения на множестве целых чисел

Правила:

- сравнения целых чисел по величине
- сложения, вычитания, умножения пар

Обозначения:

- пары чисел
- целого числа на основе теории пар
- множества целых чисел
- натурального числа на множестве целых чисел

Свойства:

- отношения «равно» на множестве целых чисел
- отношения « $>$ » на множестве целых чисел
- множества целых чисел

Теории:

- теория упорядоченных пар
- теоретико-множественная теория целого числа

Теорема:

- существования разности целых чисел

#### 2. Рациональные числа

Термины:

- дробь обыкновенная

- числитель дроби
- знаменатель дроби
- конечная десятичная дробь
- бесконечная периодическая десятичная дробь (чистая и смешанная)
- период в записи бесконечной периодической десятичной дроби

Понятие:

- второе расширение понятия числа

Определения:

- рационального числа
- эквивалентных пар
- модуля пары ( $a; b$ )
- отношений « $\equiv$ » и « $\sim$ »
- суммы, разности, произведения и частного рациональных чисел
- несократимой дроби
- десятичной дроби
- процента
- промилли
- правильной дроби
- неправильной дроби
- противоположных пар
- обратных пар
- рационального числа с теоретико-множественных позиций

Правила:

- сравнения рациональных чисел
- сложения, вычитания, умножения и деления рациональных чисел на основе теории пар
- сложения, вычитания, умножения и деления обыкновенных дробей
- обращения обыкновенных дробей в десятичные
- обращения конечных десятичных дробей в обыкновенные
- обращения чистых и смешанных бесконечных периодических дробей в обыкновенные

Обозначения:

- рационального числа на основе теории пар
- нулевой пары
- положительной пары
- отрицательной пары
- множества рациональных чисел
- рационального числа

Теорема:

- о представлении всякой несократимой обыкновенной дроби в виде десятичной дроби

Свойства:

- отношения « $\sim$ » на множестве рациональных чисел



- множества рациональных чисел
- основное свойство дроби

Теории:

- аксиоматическая теория пар
- теоретико-множественная теория рационального числа

### 3. Действительные числа. Приближенные вычисления

Термины:

- классы при разбиении множества на подмножества
- нижний и верхний классы
- десятичные приближения действительного числа по недостатку и по избытку
- десятичный знак
- значащая цифра
- точность округления

Определения:

- сечения множества рациональных чисел
- действительного числа
- рационального действительного числа
- иррационального действительного числа
- отношений « $\leq$ » и « $>$ » на множестве действительных чисел
- положительного и отрицательного действительных чисел по теории Дедекинда
- суммы, разности, произведения и частного действительных чисел

Обозначение:

- сечения множества рациональных чисел

Свойства:

- множества действительных чисел
- отношения « $>$ » на множестве действительных чисел

Правила:

- округления приближенных чисел
- сложения и вычитания приближенных чисел
- умножения и деления приближенных чисел
- правило «запасной цифры»

Теория:

- теория действительного числа по Дедекинду

### ***Раздел. Величины и их измерение***

#### 1. Аксиоматическое определение понятия величины

- Величина
- Аддитивно-скалярная величина
- Однородные и неоднородные величины
- Измерение величины
- Натурально число как результат измерения величины

- Длина отрезка
  - Величина угла
  - Площадь фигуры
  - Объем тела
  - Равновеликие фигуры
  - Равносоставленные фигуры
2. Величины, рассматриваемые в начальном курсе математики
- Длина
  - Масса
  - Промежутки времени
  - Объем
  - Зависимости между величинами

### ***Раздел. Функции, уравнения, неравенства***

1. Понятие числовой функции. Прямая и обратная пропорциональности. Линейная функция. Квадратичная функция.
- Числовая функция
  - Числовое выражение и его значение
  - Область определения
  - Множество значений
  - Четная функция, нечетная функция
  - Монотонная функция
  - График функции
  - Прямая пропорциональность
  - Обратная пропорциональность
  - Линейная функция
  - Квадратичная функция
2. Числовое выражение и его значение. Числовые равенства и неравенства.
- Числовое выражение
  - Числовое равенство
  - Числового неравенства
3. Уравнения первой степени с одной и двумя переменными
- Выражение с переменной
  - Тождества
  - Область определения выражения с переменной
  - Множество значений выражения с переменной
  - Множество решений уравнения
  - Корень уравнения
  - Линейное уравнение
  - Равносильные уравнения
  - Уравнение с двумя переменными
  - Уравнение окружности

4. Неравенства с одной переменной первой и второй степени.
  - Понятие неравенства
  - Неравенство с одной переменной первой и второй степени
  - Равносильность неравенств
  - Теоремы о равносильных неравенств
  - Модуль числа
  - Уравнение с модулем
  - Понятие критической точки
5. Системы и совокупности неравенств, их графическое решение
  - Система неравенств
  - Совокупность неравенств
  - Решение системы и совокупности неравенств
  - Графический способ решения

### ***Раздел 6. Элементы геометрии на плоскости в пространстве***

1. Из истории возникновения и развития геометрии. Геометрия как наука. Основные направления развития геометрии: исторический аспект; планиметрия; стереометрия; аксиоматическое построение геометрии

2. Понятие геометрической фигуры. Геометрические фигуры на плоскости и в пространстве: точка; плоскость; геометрическая фигура; прямая; отрезок; луч; ломаная; угол; параллельные и перпендикулярные прямые; выпуклая и невыпуклая фигура; многоугольник; треугольник (классификация по разным основаниям); четырехугольники (классификация по разным основаниям); окружность и круг, их элементы; многогранники; выпуклые и невыпуклые многогранники; призма; пирамида; правильные многогранники; цилиндр; шар; конус; развертка

3. Задачи на построение геометрических фигур на плоскости с помощью циркуля и линейки: общая постановка задачи на построение; аксиомы теории геометрических построений циркулем и линейкой; этапы решения задач на построение; простейшие построения, основные построения, методы решения задач на построение

4. Геометрические преобразования плоскости: преобразование; движение; подобие; гомотетия; осевая симметрия; центральная симметрия; параллельный перенос; поворот

5. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости: предмет и метод аналитической геометрии; координаты; метод координат на прямой и на плоскости; числовая ось; расстояние между двумя данными точками; деление отрезка в данном отношении

6. Уравнение линии. Линии первого и второго порядка: линии первого порядка; различные виды уравнения прямой; пучок прямых; угол между прямыми; линии второго порядка; окружность; эллипс; эксцентриситет эллипса; фокальные радиусы эллипса; каноническое уравнение эллипса; гипербола; каноническое уравнение гиперболы; эксцентриситет гиперболы; фокальные радиусы гиперболы; асимптоты гиперболы

## **ПРОГРАММА ИТОГОВОГО ЭКЗАМЕНА**

### **Аксиоматическое построение множества целых неотрицательных чисел**

Понятие об аксиоматическом методе построения теории. Аксиоматическое построение множества целых неотрицательных чисел. Аксиомы Пеано. Теоретико-множественный подход к построению множества целых неотрицательных чисел. Арифметические операции: определение, законы. Системы счисления. Алгоритмы арифметических действий над числами в десятичной системе счисления и других позиционных системах счисления.

### **Множества, соответствия и математические утверждения**

Множества и операции над ними.

Разбиение множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы).

Соответствия. Граф и график соответствия. Свойства соответствий. Взаимно однозначные соответствия.

Отношения. Свойства отношений. Отношения эквивалентности и порядка.

Математические утверждения и их структура. Высказывания и предикаты: определение, операции, свойства. Кванторы.

Виды теорем. Отношение следования и равносильности. Необходимы и достаточные условия.

### **Расширение понятия числа**

Первое расширение понятия числа. Целые числа. Свойства множества целых чисел и их геометрическая интерпретация.

Рациональные числа. Арифметические операции над рациональными числами.

Действительные числа. Множество действительных чисел, его свойства и геометрическая интерпретация.

Приближенные вычисления. Правила действий с приближенными числами.

### **Величины и их измерение**

Аксиоматическое определение понятия величины. Различные подходы к

определению аддитивно-скалярных величин. Основные свойства скалярных величин. Понятие измерения величины.

Величины, рассматриваемые в начальном курсе математики. Единицы их измерения. Функциональные зависимости.

### **Функции, уравнения, неравенства**

Определение числовой функции, способы задания, свойства. Функции с одной переменной.

Числовое выражение и его значение. Числовые равенства и неравенства. Свойства истинных числовых равенств и неравенств.

Уравнения первой степени с одной и двумя переменными. Определение решения уравнения, теоремы о равносильности уравнений, приемы решения. Неравенства с одной первой и второй степени. Понятие модуля. Решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля. Системы и совокупности неравенств, их графическое решение.

### **Элементы геометрии на плоскости и в пространстве**

Сущность аксиоматического метода построения математической теории. Требования, предъявляемые к системе аксиом.

«Начала Евклида», краткое содержание, достоинства и недостатки.

Проблема пятого постулата, попытки ее доказательства. Эквиваленты пятого постулата.

Система аксиом Гильберта евклидовой плоскости. Аксиомы принадлежности и порядка. Аксиомы равенства (конгруэнтности), непрерывности и аксиома параллельности.

Понятие о геометрической фигуре. Треугольники, классификация треугольников по сторонам и углам. Высоты и медианы треугольника, определения, свойства.

Биссектриса треугольника и ее свойства. Доказательство одного из них.

Теорема о сумме внутренних углов треугольника, доказательство.

Равнобедренный треугольник и его свойства. Доказательство одного из свойств.

Прямоугольный треугольник и его свойства. Доказательство одного из свойств.

Признаки равенства треугольников. Доказательство одного из них.

Признаки равенства прямоугольных треугольников. Доказательство одного из них.

Теорема Пифагора: формулировка, одно из доказательств, чертеж.

Параллельные прямые, свойства и признаки. Доказательство одного из свойств.

Многоугольники, выпуклые и невыпуклые многоугольники. Частные виды многоугольников, их определения и свойства.

Четырехугольники и их виды. Параллелограмм, определение, свойства и признаки. Доказательство одного из них.

Частные виды параллелограмма: ромб, прямоугольник, квадрат; их взаимосвязь. Доказательство одного из свойств.

Окружность и круг: определения, их элементы и свойства. Доказательство одного из свойств.

Вписанные и описанные многоугольники и их свойства. Доказательство одного из них.

Общая постановка задачи на построение. Этапы решения задачи на построение циркулем и линейкой. Примеры.

Простейшие построения и основные построения циркулем и линейкой. Пример одного из этих построений.

Геометрические места точек: описание и построение двух из них.

Задачи, неразрешимые циркулем и линейкой. Задача о трисекции угла.

Задачи, неразрешимые циркулем и линейкой. Задача о квадратуре круга.

Задачи, неразрешимые циркулем и линейкой. Задача об удвоении куба.

Преобразования плоскости. Движение и его частные виды.

Параллельный перенос, определение, свойства и построение образов фигур при параллельном переносе.

Осевая симметрия, определение, свойства и построение образов фигур при осевой симметрии.

Поворот, определение, свойства и построение образов фигур при повороте.

Центральная симметрия, определение, свойства и построение образов фигур при центральной симметрии. Центральная симметрия как частный случай поворота.

2) Типовые задания для оценивания результатов обучения на уровне «Уметь» (решать типичные задачи на основе воспроизведения стандартных алгоритмов решения):

#### Примерные типы задач для экзамена:

1. Найдите область определения выражения:  $\sqrt{\frac{5-10x}{x-7}}$ .

2. При каких значениях  $x$  является тождеством следующее равенство:

$$\frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x} ?$$

3. Найдите значение выражения  $\frac{a-3}{a+4} : \frac{2a-3}{a}$  при  $a = \frac{1}{3}$ . При каких значениях  $a$  выражение имеет смысл?

4. Укажите множество значений переменной  $x$ , при которых выражение  $\frac{5x^3 - x}{x^2 + x - 2}$  имеет смысл, нанесите его на числовую ось.

5. Перечислите свойства функций:  $y_1 = -2x + 7$  и  $y_2 = 2x + 5$ . Что следует изменить в записях, чтобы:

а) их графики были параллельны;

б) их графики проходили через одну точку оси  $y$ ?

6. На одной координатной плоскости схематически постройте графики функций:  $y_1=x+4$ ;  $y_2=-x+4$ ;  $y_3=-2x+4$ . Обоснуйте особенности их взаимного расположения.

7. Перечислите свойства функции, заданной формулой:  $y = -\frac{3}{x}$ . Изобразите её график схематично.

8. Решите уравнение и обоснуйте все преобразования, выполненные в процессе решения уравнения:  $\frac{7x+4}{2} - x = \frac{3x-5}{2}$ .

9. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 38-17x \geq \frac{x-2}{3} + 5, \\ 0,7x - 7x < (3x+4) \cdot 2. \end{cases}$$

10. Решите неравенство:  $\frac{3x^2+2001}{3x-2} > 0$ . Решение нанесите на числовую ось.

11. Решите совокупность неравенств:  $\begin{cases} 2x-1 > 3x-4, \\ 5x+3 < 8x+21. \end{cases}$

12. Решите графически систему двух уравнений:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 3. \end{cases}$

13. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, заданных системой неравенств:  $\begin{cases} y + 15x - 4 \geq 0, \\ 7x - 12 + 3y \leq 0. \end{cases}$

14. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, заданных системой неравенств:

$$\begin{cases} y \leq x^2, \\ x^2 + y^2 \leq 16. \end{cases}$$

15. Решите задачу составлением уравнения:

«Тонкая верёвка на 12 м длиннее толстой. Когда от каждой из них отрезали по 16 м, тонкой верёвки осталось в 3 раза больше, чем толстой. Сколько метров тонкой верёвки осталось?»

16. Построить окружность с центром на одном из катетов данного прямоугольного треугольника, касающуюся гипотенузы и проходящую через вершину прямого угла

### Требования к рейтинг-контролю

Перечень вопросов и заданий для подготовки к рубежному контролю по разделам дисциплины «Математика» см. банк контрольных вопросов и заданий по учебной дисциплине; типовые тесты.

## Раздел 6. Геометрические понятия в начальном курсе математики (экзамен)

Семестр	№ модуля	Тема	Кол-во баллов	Формы контроля
4	1	1.1. Начальные геометрические сведения (Модуль 1)	10	Решение задач (домашнее задание и опрос на занятии)
			2	Математический диктант
		16	Коллоквиум (теория и решение задач)	
	2	1.2. Геометрические преобразования плоскости	12	Решение задач (домашнее задание и опрос на занятии)
		Элементы теории геометрических построений циркулем и линейкой на плоскости (Модуль 2)	16	Коллоквиум (теория и решение задач)
	2.1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.	1	Решение задач (домашнее задание и опрос на занятии)	
		3	Математический диктант	
	Итоговый контроль		40	Экзамен
ИТОГО				100

## **VII. Материально-техническое обеспечение**

Материально-техническая база необходимая и применяемая для осуществления образовательного процесса и программное обеспечение по дисциплине включает (в соответствии с паспортом аудитории):

- специальные помещения (аудитории), укомплектованные специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации в аудитории;
- мультимедийное оборудование (ноутбук, экран и проектор);
- ПК для работы студентов в компьютерном классе с выходом в Интернет.

## **VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Реквизиты документа, утвердившего изменения
1.	Основная и дополнительная литература	Обновлён список литературы	Протокол №10 заседания кафедры ППНО от 10.06.2021г.
2.	Фонд оценочных средств	Расширен спектр заданий по компетенциям	Протокол №10 заседания кафедры ППНО от 10.06.2021г.
3.	Аннотация	Количество часов под	Протокол №1



	Основная и дополнительная литература	учебный план набора 2023 года, перечень формируемых компетенций Обновлён список литературы	заседания кафедры ППНО от 21.09.2023г
--	--------------------------------------	---	--