

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 25.10.2023 12:15:19  
Уникальный программный ключ: 69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:  
Руководитель ООП  
С.М. Дудаков  
25 октября 2023 г.



**Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)**

## **ОБЩАЯ АЛГЕБРА**

Направление подготовки  
02.03.02 ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ИНФОРМАТИКА И  
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Направленность (профиль)  
Информатика и компьютерные науки

Для студентов 2 курса  
Очная форма

Составитель: д.ф.-м.н., доцент Дудаков С.М.

Тверь, 2023

# I. Аннотация

## 1. Цель и задачи дисциплины:

дать представление об основных структурах общей алгебры.

## 2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина входит в раздел «Дисциплины профиля подготовки» части, формируемой участниками образовательных отношений, блока 1.

**Предварительные знания и навыки.** Знание курсов линейной алгебры, дискретной математики, математического анализа функций одного переменного

**Дальнейшее использование.** Полученные знания используются в последующем при изучении предметов: «Основы теории моделей», «Теория языков первого порядка», а также при продолжении обучения в магистратуре.

## 3. Объем дисциплины: 4 зач. ед., 144 акад. ч., в том числе:

**контактная аудиторная работа** лекций 30 ч., практических занятий 30 ч.,  
**контактная внеаудиторная работа** контроль самостоятельной работы 0 ч., в том числе курсовая (расчетно-графическая) работа 0 ч.;  
**самостоятельная работа** 84 ч., в том числе контроль 36 ч.

## 4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы:

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ПК-1, Способен к поиску научно-технической информации в области теоретической и прикладной информатики	ПК-1.1, Знает основные приемы поиска научно-технической информации ПК-1.2, Отбирает научно-техническую информацию в соответствии с поставленной задачей ПК-1.3, Изучает и анализирует научно-техническую информацию на предмет их применимости для решения поставленной задачей

## 5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения:

зачет в 7 семестре

**6. Язык преподавания:**

русский

## II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Для студентов очной формы обучения

Учебная программа — наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Контроль сам. раб., в т.ч. курсовая работа	Сам. раб., в т.ч. контроль (час.)
		Лекции		Практ. занятия / Лаб. работы			
		Всего	В т.ч. практ. подг.	Всего	В т.ч. практ. подг.		
1	2	3	4	5	6	7	8
Универсальная алгебра	48	10		10/0		0	28
Моноиды и группы	48	10		10/0		0	28
Кольца и поля	48	10		10/0		0	28
Итого	144	30	0	30/0	0/0	0	84

### Учебная программа дисциплины

#### 1. Универсальная алгебра

- Предмет общей алгебры
- Универсальные алгебры: сигнатуры, операции, термы и их значения. Примеры алгебр
- Изоморфизмы алгебр
- Подалгебры и вложения
- Гомоморфизмы алгебр, конгруэнтности, фактор-алгебры, основная теорема о гомоморфизмах
- Порождающие элементы, свободные алгебры
- Декартовы произведения, примеры разложения алгебр в декартовы произведения
- Тождества и многообразия, свободные элементы многообразий

#### 2. Моноиды и группы

- Полугруппы и моноиды. Строение некоторых моноидов: свободный моноид, идемпотентный коммутативный моноид, симметрический моноид, циклический моноид
- Группы, примеры групп: числовые группы, матричные группы, группы симметрий фигур

- Строение некоторых групп: циклические группы, симметрические группы, конечные группы малых порядков
- Конгруэнтности в группах: подгруппы, смежные классы, нормальные подгруппы, гомоморфизмы групп, теорема Лагранжа о количестве элементов в группе
- Действие группы на множестве, формула орбит, сопряжения, некоторые свойства конечных групп.
- Абелевы группы, теорема о строении конечных абелевых групп

### 3. Кольца и поля

- Кольца, как обогращения абелевых групп, виды колец, примеры колец: числовые и матричные кольца, кольца многочленов, кольцо гауссовых чисел, тело кватернионов, поле комплексных чисел, кольца эндоморфизмов
- Гомоморфизмы колец, идеалы, главные и неглавные идеалы, максимальные идеалы
- Делители нуля, целостные кольца, обратимые и простые элементы, поля частных
- Евклидовы кольца, разложение на множители, кольца главных идеалов, факториальные кольца
- Кольца многочленов над полями, корни многочленов
- Конечные поля, основные свойства конечных полей: количество элементов в конечном поле, цикличность мультипликативной группы конечного поля

## III. Образовательные технологии

Учебная программа — наименование разделов и тем	Вид занятия	Образовательные технологии
Универсальная алгебра	лекции, практические занятия	изложение теоретического материала, решение задач
Моноиды и группы	лекции, практические занятия	изложение теоретического материала, решение задач
Кольца и поля	лекции, практические занятия	изложение теоретического материала, решение задач

## IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

### Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикаторов ПК-1.1, ПК-1.2

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Владеть базовыми навыками самостоятельного исследования	<p>Возможные темы для самостоятельного изучения</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Основные понятия теории категорий</li> <li>• Упорядоченные поля</li> <li>• Теорема Биркгофа</li> </ul>	оценка 3 — способен самостоятельно изучить научные результаты, оценка 4 — кроме того, способен проинтерпретировать различные аспекты полученной информации, оценка 5 — кроме того, способен применить полученные знания для решения конкретных задач

### Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора ПК-1.3

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Знать основные объекты универсальной алгебры и их свойства	<p>Примеры вопросов к экзамену:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Универсальные алгебры, сигнатуры, термы, изоморфизмы.</li> <li>• Подалгебры, порождающие элементы, вложения.</li> <li>• Гомоморфизмы, гомоморфные образы, конгруэнтности, фактор-алгебры.</li> <li>• Декартовы произведения, тождества, многообразия.</li> </ul>	оценка 3 — знает основные определения и свойства определяемых объектов, оценка 4 — кроме того, знает взаимосвязи между объектами, оценка 5 — кроме того, знает доказательства указанных утверждений
Уметь использовать методы универсальной алгебры при исследовании предметных областей	<p>Примеры задач для контрольных работ:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Доказать, что алгебры <math>(\mathbb{G}, \cap)</math> и <math>(\mathbb{R}, \times)</math> неизоморфны. <math>(\mathbb{G}, \cap)</math> — множество геометрических фигур на плоскости с операцией пересечения.</li> <li>• Найти подалгебру, которая порождается в алгебре <math>(\mathbb{R}, +, -, \times)</math> множеством <math>\{\sqrt{2}, 5\}</math>.</li> <li>• Доказать, что отношение <math>\text{sign } x = \text{sign } y</math> является конгруэнтностью в алгебре <math>(\mathbb{R}, \times)</math>, построить фактор-алгебру.</li> </ul>	оценка 3 — может находить подалгебры, порождённые подалгебры, отношения конгруэнтности, оценка 4 — кроме того, может строить простейшие гомоморфизмы и изоморфизмы либо доказывать их отсутствие, оценка 5 — кроме того, умеет строить фактор-алгебры
Знать базовые понятия теории полугрупп, моноидов	<p>Примеры вопросов к экзамену:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Полугруппы и моноиды. Идемпотенты, сократимые и обрати-</li> </ul>	оценка 3 — знает основные определения теорий полугрупп,

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
и групп	<p>мые элементы.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Циклические моноиды, свободные моноиды.</li> <li>• Группы, абелевы группы, циклические группы. Вложение моноида в группу.</li> <li>• Группы перестановок, задание групп определяющими соотношениями.</li> <li>• Подгруппы, смежные классы, порядок и индекс подгруппы.</li> <li>• Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы, фактор-группа.</li> <li>• Действие группы на множестве, орбиты.</li> </ul>	<p>моноидов и групп, их свойства, оценка 4 — кроме того, знает взаимосвязи между различными объектами, оценка 5 — кроме того, знает доказательства указанных утверждений</p>
Уметь решать простейшие задачи для универсумов с групповой структурой	<p>Примеры задач для контрольных работ:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Пусть <math>\mathcal{D}_5</math> — группа симметрий правильного пятиугольника. Найти в ней: <ul style="list-style-type: none"> <li>– все подгруппы;</li> <li>– все нормальные подгруппы;</li> <li>– орбиты всех элементов при действии на себе сопряжениями;</li> <li>– центр группы.</li> </ul> </li> <li>• Построить моноид (с операцией композиции) гомоморфизмов циклической группы из 4 элементов в себя. Указать элементы и правило их умножения.</li> <li>• Построить группу с образующими <math>a, b, c</math> и определяющими соотношениями <math display="block">ba = ab, \quad c^2 a = ac, \quad a^3 = b^2 = c^3 = e, \quad abc = a^2.</math> Выписать все элементы этой группы без повторений, доказать, что других элементов нет.</li> </ul>	<p>оценка 3 — умеет строить таблицу умножения для простейших групп, находить подгруппы, оценка 4 — кроме того, умеет строить группы с помощью определяющих соотношений, оценка 5 — кроме того, умеет строить фактор-группы</p>
Знать основные определения и свойства колец и полей	<p>Примеры вопросов к экзамену:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Кольца, тела, поля. Делители нуля. Тело кватернионов.</li> <li>• Целостные кольца, вложение кольца в поле.</li> <li>• Гомоморфизмы колец, идеалы, фактор-кольца.</li> <li>• Евклидовы кольца, кольца главных идеалов, факториальные кольца.</li> <li>• Поля. Кольца многочленов над полями. Корни многочлена, производная.</li> <li>• Простые поля, расширения полей, поле разложения многочлена.</li> <li>• Конечные поля.</li> </ul>	<p>оценка 3 — знает базовые определения теории колец и полей, оценка 4 — кроме того, знает взаимосвязи между различными объектами, оценка 5 — кроме того, знает доказательства указанных утверждений</p>
Уметь выполнять базовые операции с полями и кольцами многочленов	<p>Примеры задач для контрольных работ:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Над полем <math>\mathbb{Z}_5</math> задан многочлен: <math>x^4 + 2x^2 - x - 2</math>. Найти все его корни и разложить на простые множители в этом поле.</li> <li>• Над полем <math>\mathbb{Z}_5</math> задан многочлен: <math>x^2 + 4x + 2</math>. Разложить этот многочлен на линейные множители в подходящем расширении поля.</li> </ul>	<p>оценка 3 — умеет выполнять простейшие операции в полях Гауэ, выполнять основные действия с многочленами над полем, оценка 4 — кроме того, может</p>

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Определить, будет ли множество многочленов вида <math>x^p(x) + 2n</math> (<math>n \in \mathbb{Z}</math>) образовывать идеал в кольце <math>\mathbb{Z}[x]</math>, если да, то будет ли он главным.</li> </ul>	выполнять факторизацию, строить фактор-кольца, оценка 5 — кроме того, может выполнять простейшие действия с идеалами колец

## V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1. Рекомендованная литература

#### а) Основная литература

- [1] Дудаков С.М. Универсальная алгебра [Электронный ресурс] : учебное пособие для физико-математических направлений — Тверь : Тверской государственный университет, 2019. — 112 с. — Режим доступа: <http://texts.lib.tversu.ru/texts/147784учеб.pdf>
- [2] Сборник задач по алгебре [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.А. Артамонов [и др.]. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2007. — 168 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2743>. — Загл. с экрана.
- [3] Смолин, Ю.Н. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие / Ю.Н. Смолин. — 5-е изд., стер.—Москва : ФЛИНТА, 2017. — 464 с. - ISBN 978-5-9765-0050-1. — Режим доступа: <https://new.znanium.com/catalog/product/1034573> (ЭБС ИНФРА-М)

#### б) Дополнительная литература

- [4] Курош, А.Г. Лекции по общей алгебре : учебник / А.Г. Курош. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 556 с. — ISBN 978-5-8114-0617-3. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/104951> — Загл. с экрана (ЭБС ЛАНЬ).
- [5] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры [Электронный ресурс] : учебник. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2001. — 272 с. — Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=59284](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59284) — Загл. с экрана (ЭБС ЛАНЬ).
- [6] Окунев Л.Я. Высшая алгебра [Электронный ресурс] : учебник. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2009. — 336 с. — Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=289](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=289) — Загл. с экрана (ЭБС ЛАНЬ).
- [7] Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2009. — 185 с. — Режим досту-

па: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=290](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=290) — Загл. с экрана (ЭБС ЛАНЬ).

## 2. Программное обеспечение

Наименование помещений	Программное обеспечение
Ауд. 201а (компьютерная лаборатория ПМиК) (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Перечень программного обеспечения (со свободными лицензиями): Linux Kubuntu, KDE, TeXLive, TeXStudio, LibreOffice, GIMP, Gwenview, ImageMagick, Okular, Skanlite, Google Chrome, KDE Connect, Konversation, KRDC, KTorrent, Thunderbird, Elisa, VLC media player, PulseAudio, KAppTemplate, KDevelop, pgAdmin4, PostgreSQL, Qt, QtCreator, R, RStudio, Visual Studio Code, Perl, Python, Ruby, clang, clang++, gcc, g++, nasm, flex, bison, Maxima, Octave, Dolphin, HTop, Konsole, KSystemLog, Xterm, Ark, Kate, KCalc, Krusader, Spectacle, Vim.

## 3. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

- [1] ЭБС «ZNANIUM.COM» <http://www.znanium.com>
- [2] ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru>
- [3] ЭБС IPRbooks <http://www.iprbookshop.ru>
- [4] ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>
- [5] ЭБС «Юрайт» <https://urait.ru>
- [6] ЭБС ТвГУ <http://megapro.tversu.ru/megapro/Web>
- [7] Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (подписка на журналы) [https://elibrary.ru/projects/subscription/rus\\_titles\\_open.asp](https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp)
- [8] Репозитарий ТвГУ <http://eprints.tversu.ru>

## 4. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- [1] A Course in Universal Algebra, <https://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/u>
- [2] An Invitation to General Algebra and Universal Constructions, <https://math.berkeley.edu/~gbergman/245/>
- [3] Московский центр непрерывного математического образования, <http://www.mccme.ru/>

## VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Важной составляющей данного раздела РПД являются требования к рейтинг-контролю с указанием баллов, распределенных между модулями и видами работы обучающихся.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60 баллов. Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

Обучающемуся, набравшему 40–54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55–57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премияльные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58–60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премияльные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично». В каких-либо иных случаях добавление премияльных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен.

### Требования к рейтинг контролю

**Контрольная работа 1.** Тема: универсальная алгебра, морфизмы, порождающие элементы, подалгебры, конгруэнтности, фактор-алгебры. Пример задания:

1. Доказать, что алгебры  $(\mathbb{R}, \sin)$  и  $(\mathbb{R}, \cos)$  неизоморфны.
2. Определить, будет ли отношение « $\frac{x}{y}$  является квадратом рационального числа» конгруэнтностью в алгебре  $(\mathbb{Q}, \times)$ . Если да, построить фактор-алгебру.
3. Найти подалгебру, которая порождается в алгебре  $(\mathbb{R}, +, -, \times)$  множеством  $\{\sqrt{2}, 5\}$ .

За решение каждой задачи выставляется максимум 5 баллов.

**Контрольная работа 2.** Темы: полугруппы, моноиды, группы. Пример задания:

1. Построить группу  $\mathcal{D}_{3,2}$  — группу симметрий правильной треугольной призмы.
2. Найти в группе из предыдущего задания:
  - нетривиальную нормальную подгруппу (доказать);
  - нетривиальную ненормальную подгруппу (доказать);
  - орбиты всех элементов при действии на себе сопряжениями.

3. Построить группу с образующими  $a, b, c$  и определяющими соотношениями

$$ba = ab, \quad c^2a = ac, \quad a^3 = b^2 = c^3 = e, \quad cbc = a^2.$$

Выписать все элементы этой группы без повторений, построить таблицу умножения, доказать, что других элементов нет.

За решение каждой задачи выставляется максимум 5 баллов.

**Контрольная работа 3.** Темы: кольца, поля. Пример задания:

1. Дано кольцо целочисленных матриц  $2 \times 2$ . Определить, будут ли матрицы, состоящие только из чётных чисел, образовывать двусторонний идеал, если да, то найти все элементы фактор-кольца.
2. Над полем  $\mathbb{Z}_7$  задан многочлен:  $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x - 3$ . Разложить этот многочлен на линейные множители в подходящем расширении поля.

За решение каждой задачи выставляется максимум 5 баллов.

**Общая сумма** В сумме за все задачи выставляет не более 30 баллов.

За работу на практических занятиях (решение задач у доски, выполнение домашних заданий) выставляется максимум 30 баллов.

За ответ на экзамене выставляется максимум 40 баллов.

## VII. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

### Для аудиторной работы

Наименование помещений	Материально-техническое оснащение помещений
Ауд. 308 (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Набор учебной мебели, экран проектор.

### Для самостоятельной работы

Наименование помещений	Материально-техническое оснащение помещений
Ауд. 201а (компьютерная лаборатория ПМиК) (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Набор учебной мебели, доска маркерная, компьютер, сервер (системный блок), концентратор сетевой.

## VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№ п/п	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесённых изменений	Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения