

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич
Должность: врио ректора
Дата подписания: 16.10.2023 21:40:08
Уникальный программный ключ:
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:
Руководитель ООП
Н.А. Семькина

«4» 09


Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Теория функций комплексного переменного

Специальность

10.05.01 Компьютерная безопасность

Специализация

«Математические методы защиты информации»

Для студентов 3 курса очной формы обучения

Составитель: к.ф.-м.н., доцент

 С.Ю. Граф

Тверь 2023

I. Аннотация

1. Наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

Теория функций комплексного переменного

2. Цель и задачи дисциплины

Целями освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» являются изучение основных понятий указанной дисциплины необходимых для освоения ООП и последующей профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» является дисциплиной вариативной части.

Для освоения дисциплины необходимы устойчивое знание школьного курса математики, наличие устойчивых навыков работы с объектами элементарной математики, а также основ курса математический анализ.

4. Объём дисциплины:

4 зачетных единицы, 144 академических часов, в том числе

контактная работа: лекции – 38 часов, практические занятия – 38 часов;

самостоятельная работа – 32 часа, контроль – 36 часов.

5. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
--	--

<p>Базовый. ПК-3.</p> <p>Способность проводить анализ безопасности компьютерных систем на соответствие отечественным и зарубежным стандартам в области компьютерной безопасности.</p>	<p>Владеть: математическим аппаратом, изученным в данном курсе и необходимым для освоения математического аппарата других курсов, а также для дальнейшего совершенствования и развития профессиональной деятельности; методологией анализа безопасности компьютерных систем.</p> <p>Уметь: применять изученные математические методы при решении профессиональных задач и задач с практическим содержанием; проводить анализ безопасности компьютерных систем на соответствие отечественным и зарубежным стандартам в области компьютерной безопасности.</p> <p>Знать: разделы курса «Теория функций комплексного переменного»: поле комплексных чисел; функции комплексного переменного; интегралы от функций комплексного переменного; ряды Тейлора и Лорана; изолированные особые точки и вычеты; отечественные и зарубежные стандарты в области компьютерной безопасности.</p>
<p>Базовый. ПК-11.</p> <p>Способность участвовать в проведении экспериментально-исследовательских работ при проведении сертификации средств защиты информации в компьютерных системах по требованиям безопасности информации.</p>	<p>Владеть: навыками проведения экспериментально-исследовательских работ.</p> <p>Уметь: оценивать надежность средств защиты информации в компьютерных системах по требованиям безопасности информации.</p> <p>Знать: современные требования к сертификации средств защиты информации в компьютерных системах..</p>

<p>Базовый. ПК-17. Способность производить установку, наладку, тестирование и обслуживание современного общего и специального программного обеспечения, включая операционные системы, системы управления базами данных, сетевое программное обеспечение.</p>	<p>Владеть: практическими навыками установки, наладки, тестирования и обслуживания современного общего и специального программного обеспечения, включая операционные системы, системы управления базами данных, сетевое программное обеспечение.</p>
	<p>Уметь: производить установку, наладку, тестирование и обслуживание современного общего и специального программного обеспечения, включая операционные системы, системы управления базами данных, сетевое программное обеспечение.</p>
	<p>Знать: специальное программное обеспечение, включая операционные системы, системы управления базами данных, сетевое программное обеспечение.</p>

6. Форма промежуточного контроля

Экзамен.

7. Язык преподавания русский.

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа		Самостоятельная работа	Контроль
		лекции	практические занятия		
Раздел 1 Поле комплексных чисел	20	6	6	4	4
Поле комплексных чисел, аксиоматика множества комплексных чисел.	4	2	2	1	1
Модуль и аргумент комплексного числа. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представ-	6	1	1	1	1

ления комплексного числа. Степень и радикал, формула Муавра.					
\mathbb{C} как метрическое пространство. Евклидова и сферическая метрики. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость, сфера Римана. Сходящиеся последовательности в \mathbb{C} и $\bar{\mathbb{C}}$. Лемма о покоординатной сходимости. Критерий Коши, теорема Больцано-Вейерштрасса. Полнота и компактность расширенной комплексной плоскости.	4	2	2	1	1
Топологии в \mathbb{C} и $\bar{\mathbb{C}}$ (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, дополнение к множеству, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).	6	1	1	1	1
Раздел 2 Функции комплексного переменного	30	8	8	6	8
Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного. Непрерывность в сферической метрике. Теоремы о непрерывных функциях комплексного переменного на компакте, континууме, в области.	12	2	2	2	2
Дифференцируемость в смысле действительного и комплексного анализа. Моногенные и голоморфные функции (определения, примеры). Формальные производные. Критерий моногенности и ф.к.п. в точке, условия Коши-Римана. Производная голоморфной функции.	12	4	4	2	2
Касательное отображение и якобиан дифференцируемого отображения. Локальное поведение дифференцируемого отображения с ненулевым якобианом. Локальное поведение голоморфного отображения. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.	6	2	2	2	4
Раздел 3 Интегралы от функций комплексного переменного	30	8	8	6	8

Криволинейные интегралы в ТФКП. Определение, свойства, примеры, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода из курса действительного анализа. Переход к пределу под знаком интеграла.	6	1	1	2	2
Интегральная теорема Коши и её обобщение на многосвязные области.	6	2	2	1	1
Интегральная формула Коши.	6	2	2	1	2
Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных.	6	2	2	1	2
Первообразная от ф.к.п. Формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.	6	1	1	1	1
Раздел 4 Ряды Тейлора и Лорана	30	8	8	8	6
Последовательности и ряды аналитических функций в области. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций.	6	1	1	1	1
Степенные ряды. Теорема Абеля и теорема о круге сходимости, формула Коши – Адамара. Локально равномерная сходимость степенного ряда. Действия со степенными рядами, почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов.	6	2	2	2	2
Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы, единственность разложения. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.	6	2	2	2	1
Ряды Лорана, структура области сходимости. Теорема о представлении голоморфной функции рядом Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.	6	2	2	2	1
Теорема Лиувилля. Доказательство с её помощью теоремы Гаусса о существовании комплексного корня у любого многочлена, отличного от константы. Внутренняя теорема единственности. Нули голоморфных функций. Факторизация голоморфной функции в окрест-	6	1	1	1	1

ности её нуля.					
Раздел 5 Изолированные особые точки и вычеты	34	8	8	8	10
Изолированные особые точки голоморфной функции, классификация изолированных особых точек однозначного характера: устранимая особая точка, полюс, порядок полюса, существенная особая точка. Бесконечно удаленная точка как особая. Критерии изолированных особых точек. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса, понятие о теореме Пикара. Классификация и критерии изолированной особой точки на бесконечности.	10	2	2	2	3
Определение вычета в изолированной особой точке и формулы для вычисления вычетов. Примеры. Вычисление вычета на бесконечности. Примеры. Теорема Коши о вычетах. Теорема о сумме вычетов.	10	2	2	2	3
Применения вычетов для нахождения определенных интегралов. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов и главных значений интегралов от действительных функций. Примеры.	10	3	3	3	3
Логарифмический вычет, принцип аргумента, теорема Руше.	4	1	1	1	1
ИТОГО:	144	38	38	32	36

Учебная программа

Раздел 1

Поле комплексных чисел

Поле комплексных чисел, аксиоматика множества комплексных чисел.

Модуль и аргумент комплексного числа. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представления комплексного числа. Степень и радикал, формула Муавра.

\mathbb{C} как метрическое пространство. Евклидова и сферическая метрики. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость, сфера Римана. Сходящиеся последовательности в \mathbb{C} и $\bar{\mathbb{C}}$. Лемма о по-

координатной сходимости. Критерий Коши, теорема Больцано-Вейерштрасса. Полнота и компактность расширенной комплексной плоскости.

Топологии в \mathbb{C} и $\bar{\mathbb{C}}$ (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, дополнение к множеству, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).

Раздел 2

Функции комплексного переменного

Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного. Непрерывность в сферической метрике. Теоремы о непрерывных функциях комплексного переменного на компакте, континууме, в области.

Дифференцируемость в смысле действительного и комплексного анализа. Моногенные и голоморфные функции (определения, примеры). Формальные производные. Критерий моногенности и ф.к.п. в точке, условия Коши-Римана. Производная голоморфной функции.

Касательное отображение и якобиан дифференцируемого отображения. Локальное поведение дифференцируемого отображения с ненулевым якобианом. Локальное поведение голоморфного отображения. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.

Раздел 3

Интегралы от функций комплексного переменного

Криволинейные интегралы в ТФКП. Определение, свойства, примеры, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода из курса действительного анализа. Переход к пределу под знаком интеграла.

Интегральная теорема Коши и её обобщение на многосвязные области.

Интегральная формула Коши.

Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных.

Первообразная от ф.к.п. Формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.

Раздел 4

Ряды Тейлора и Лорана

Последовательности и ряды аналитических функций в области. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций.

Степенные ряды. Теорема Абеля и теорема о круге сходимости, формула Коши – Адамара. Локально равномерная сходимость степенного ряда. Действия со степенными рядами, почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов.

Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы, единственность разложения. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.

Ряды Лорана, структура области сходимости. Теорема о представлении голоморфной функции рядом Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Теорема Лиувилля. Доказательство с её помощью теоремы Гаусса о существовании комплексного корня у любого многочлена, отличного от константы.

Внутренняя теорема единственности. Нули голоморфных функций. Факторизация голоморфной функции в окрестности её нуля.

Раздел 5

Изолированные особые точки и вычеты

Изолированные особые точки голоморфной функции, классификация изолированных особых точек однозначного характера: устранимая особая точка, полюс, порядок полюса, существенная особая точка. Бесконечно удаленная точка как особая. Критерии изолированных особых точек. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса, понятие о теореме Пикара. Классификация и критерии изолированной особой точки на бесконечности.

Определение вычета в изолированной особой точке и формулы для вычисления вычетов. Примеры.

Вычисление вычета на бесконечности. Примеры.

Теорема Коши о вычетах. Теорема о сумме вычетов.

Применения вычетов для нахождения определенных интегралов. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов и главных значений интегралов от действительных функций. Примеры.

Логарифмический вычет, принцип аргумента, теорема Руше.

III. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

Темы курсовых работ

Исследовательские задания

IV. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенции.

Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)	Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания
<i>базовый</i> владеть	<p>Вычислить. Представить результат в алгебраической и экспоненциальной формах записи.</p> $z = \frac{2}{i+1} - \frac{(1+i)(2-2i)}{(1-i)(1-2i)}$	<p>Правильное выполнение задания – 6 баллов. Наличие отдельных ошибок – 3 – 5 баллов. Неверное решение – 0 баллов.</p>
<i>базовый</i> уметь	<p>Исследовать функцию на моногенность. В точках моногенности найти производные.</p> $f(z) = \operatorname{Re}(z + 2\bar{z})^2 + i z + 3i ^2.$	<p>Правильное выполнение задания – 6 баллов. Наличие отдельных ошибок – 3 – 5 баллов. Большое количество ошибок, решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов.</p>
<i>базовый</i> знать	<p>Существует ли голоморфная функция с указанными свойствами. В случае положительного ответа восстановить голоморфную функцию.</p> $f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$ $v(x, y) = x^3 y - e^y.$	<p>Глубокие знания – 4 балла. Неуверенные знания – 2 – 3 балла. Серьезные пробелы в знаниях, ошибки – 0 баллов</p>

2. Оценочные средства для контроля успеваемости:

1. Вопросы для самостоятельной работы студентов.
2. Темы рефератов для самостоятельной работы студентов.
3. Контрольные работы для проверки усвоения материала.
4. Тесты для проведения рейтинг-контроля.
5. Задания для контроля практических навыков.
6. Вопросы к экзамену.

3. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости проводится в виде устных опросов, проверки выполнения домашних заданий, выполнения письменных аудиторных и домашних контрольных работ, написания рефератов, решения задач.

Типовые контрольные вопросы для проверки самостоятельной работы

1. Сформулируйте аксиомы арифметических операций на множестве комплексных чисел.
2. Приведите примеры векторной, алгебраической, тригонометрической и экспоненциальной форм записи комплексного числа.
3. Дать определение модуля, аргумента комплексного числа.
4. Дать определение алгебраического корня из комплексного числа
5. Дать определение открытого и замкнутого множеств, предельных и граничных точек, границы, замыкания, связности множества, области, компакта, континуума.
6. Дать определение непрерывности ф.к.п. в евклидовой и сферической метриках.
7. Дать определение моногенной и голоморфной функции.
8. Сформулировать условия Коши-Римана в действительной и комплексной формах.
9. Сформулировать геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.
10. Сформулировать групповое свойство мебиусовых преобразований.
11. Сформулировать круговое свойство мебиусовых преобразований
12. Сформулировать теорему о существовании и единственности мебиусова преобразования, нормированного соответствием трёх пар точек.
13. Определить образ полярной сетки при отображении степенной функцией с натуральным показателем.
14. Сформулировать определение экспоненты, её аналитические и геометрические свойства.
15. Дать определение логарифма.
16. Сформулировать теорему Римана о конформных отображениях, основные принципы конформных отображений.
17. Сформулировать интегральную теорему Коши-Гурса.
18. Сформулировать интегральную формулу Коши.
19. Сформулировать теорему Морера.
20. Привести формулы Коши для производных голоморфной функции.
21. Сформулировать теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
22. Сформулировать теорему Абеля о степенных рядах.
23. Сформулировать теорему о представлении голоморфной функции степенным рядом.

24. Привести разложения основных элементарных функций в ряды Тейлора.
25. Сформулировать теорему Лиувилля.
26. Сформулировать теорему Лорана.
27. Привести неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
28. Сформулировать внутреннюю теорему единственности.
29. Дать определение изолированной особой точки голоморфной функции, привести их классификацию.
30. Сформулировать критерии у.о.т. и полюса.
31. Сформулировать критерий с.о.т.
32. Дать определение вычета в и.о.т. и привести формулы для вычисления вычетов.
33. Сформулировать теорему Коши о вычетах.
34. Сформулировать теорему о сумме всех вычетов.
35. Сформулировать принцип аргумента.
36. Сформулировать теорему Руше

Банк контрольных вопросов и заданий. Типовые задачи

Комплексные числа

1. Найти все значения радикала $\sqrt{1 + \sqrt[3]{-1}}$.
2. Найти все значения $i^{\sin i}$.
3. Вычислить $\alpha = e^{\ln 2 + i\pi/2}$ и изобразить точку на плоскости.
4. Вычислить $\operatorname{sh}(\ln 3 + i\pi)$.
5. Вывести формулы стереографической проекции и формулу для сферического расстояния. Найти сферическое расстояние между точками 1 и ∞ , i и $-i$.
6. Написать комплексные параметрические уравнения окружности с данным центром и радиусом, эллипса и гиперболы с фокусами в точках ± 1 и данными полуосями, параболы $y = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, отрезка прямой, соединяющей две точки.

Функции комплексного переменного

7. Является ли функция $w = ze^{2i\bar{z}}$ голоморфной в начале координат? Доказать голоморфность функций $\sin z$ и $\operatorname{ch} z$ на \mathbf{C} .
8. Восстановить голоморфную функцию по заданной ее реальной части $u = x^3 - 3x^2y + 2x^2 - 2y^2 + e^x \sin y$, $(x, y) \in \mathbf{C}$.
9. Методом слоений найти образы верхнего единичного полукруга при преобразованиях $w = 1/z$, $w = 1/\bar{z}$ и $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

10. Найти общий вид мобиусовых преобразований верхней полуплоскости на себя, верхней полуплоскости на единичный круг, единичного круга на себя.

11. Какая часть плоскости сжимается при отображении $w = \frac{z}{2z-1}$? Какая часть плоскости растягивается при отображении $w = e^{2iz}$?

Ряды Тейлора и Лорана

12. Найти область сходимости функционального ряда:

$$(a) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{2\nu}}{3^{\nu}}; \quad (б) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sin^{\nu}(z); \quad (в) \sum_{\nu=-1}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\nu}.$$

13. Найти нули и изолированные особые точки функций:

$$(a) \frac{z \cos z}{\sin^2 z}; \quad (б) \frac{\sin^2 z}{e^z - 1}; \quad (в) \frac{z^2 - zi}{e^{1/z} + 1}.$$

Определить порядки нулей и классифицировать и.о.т.

14. Представить рядами Лорана в проколотой окрестности точки $z=a$ следующие функции

$$(a) \frac{z}{z^2 - 3z + 2}, \quad a = 1; \quad (б) \frac{z^2}{z^3 + 1}, \quad a = \infty;$$

$$(в) \frac{\sin^2 z}{z}, \quad a = 0; \quad (г) \frac{\operatorname{ch}^2 z}{z^2}, \quad a = 0.$$

Вычеты и их применение

15. Найти вычеты заданных функций в ее и.о.т., включая точку $z = \infty$:

$$(a) \frac{\operatorname{tg} z - z}{(1 - \cos z)^2}; \quad (б) \frac{z}{\operatorname{ch} z - 1};$$

$$(c) z^3 \sin \frac{\pi}{z}; \quad (д) \sin z \cdot \sin \frac{1}{z}.$$

16. Вычислить с помощью теоремы о вычетах интегралы:

$$(a) \oint_{|z|=4} \frac{z}{z+3} e^{1/3z} dz; \quad (б) \oint_{|z+1|=2} \frac{dz}{z \sin z};$$

$$(в) \oint_{|z|=2} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz; \quad (г) \oint_{|z|=1/2} \frac{dz}{(2 + \sqrt{z-1}) \sin z}, \quad (\sqrt{z-1}|_{z=0} = i).$$

17. Применяя лемму Жордана, вычислить интегралы:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}; \quad (б) \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \quad 0 < a < b;$$

$$(c) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 5x + 6}; \quad (д) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2 + 4)(x-1)}.$$

18. Вычислить интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi$:

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3 \cos \varphi}; \quad (б) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, \quad -1 < a < 1, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$(в) \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{1 - a \sin^2 \varphi}, \quad 0 < a < 1; \quad (г) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2 \cos \varphi)^n}{5 + 4 \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi, \quad n = 0, 1, \dots$$

19. Вычислить несобственные интегралы от рациональных функций:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}; \quad (б) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$(в) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^3 + 1}; \quad (г) \text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}.$$

Типовые тесты.

1. Укажите какие из приведенных функций являются голоморфными в единичном круге.

$$a) \frac{z}{(1-z)^2} \quad б) \frac{z}{z^2 + 1}$$

$$в) \frac{z}{e^{1/z} - 1} \quad г) \frac{z}{\sin z}$$

Выберите один из 4-х вариантов ответа. 1. а), г) 2. б), г) 3. а), б)
4. б), в)

2. Укажите какие из приведенных функций имеют существенно особую точку.

$$a) \frac{z-1}{z^2-1} \cdot \frac{1}{\sin z}$$

$$б) \frac{z}{e^{1/z} - 1}$$

$$в) \frac{z \cdot \cos z}{z^2 + 1}$$

$$г) \frac{z^2}{e^z - 1}$$

Выберите один из 4-х вариантов ответа. 1. а), б), в), г) 2. б), г)
3. б), в), г) 4. а), в)

4. Промежуточная аттестация

По окончании освоения дисциплины проводится промежуточная аттестация в виде экзамена, что позволяет оценить работу студентов в течение всего срока изучения дисциплины. Экзамен призван выявить уровень, прочность и систематичность полученных студентом теоретических знаний и умений применять эти знания на практике.

Вопросы к экзамену

1. Поле комплексных чисел. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представления комплексного числа. Геометрические свойства комплексных чисел.
2. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость. Сходящиеся последовательности в \mathbb{C} и $\bar{\mathbb{C}}$. Лемма о покоординатной сходимости. Критерий Коши, теорема Больцано-Вейерштрасса.
3. Евклидова и сферическая метрики. Топологии в \mathbb{C} и $\bar{\mathbb{C}}$ (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, дополнение к множеству, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).
4. Функции комплексного переменного (ф.к.п.). Непрерывность, ограниченность ф.к.п. Теоремы о непрерывных ф.к.п. на компакте, в области.
5. Моногенные и голоморфные функции (определения, примеры). Условия Коши-Римана в действительной и комплексной формах. Критерии моногенности и голоморфности ф.к.п. в точке. Связь голоморфных и гармонических функций.
6. Аффинные преобразования. Целые линейные преобразования. Декомпозиция целой линейной функции, её свойства.
7. Касательное отображение. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Определения конформного отображения 1-го и 2-го рода. Якобиан конформного отображения. Формулировки теоремы Римана о конформных отображениях.
8. Криволинейные интегралы от ф.к.п., их свойства, вычисление. Примеры вычисления интегралов от ф.к.п.
9. Интегральная теорема Коши-Гурса и её обобщение на многосвязные области (с доказательствами).
10. Интегральная формула Коши. Доказательство, обобщение на случай многосвязных областей, следствия.
11. Неопределённый интеграл от ф.к.п. в плоской области и формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.
12. Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных.
13. Поточечная, равномерная, локально-равномерная сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. Примеры. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование функциональных рядов. Теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
14. Теорема Абеля о степенных рядах. Существование радиуса сходимости и методы его вычисления. Формула Коши-Адамара. Локально-равномерная сходимость, почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов.
15. Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Голоморфность суммы степенного ряда. Степенной

- ряд как ряд Тейлора для своей суммы. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.
16. Теорема Лиувилля. Доказательство с её помощью теоремы Гаусса о существовании комплексного корня у любого многочлена, отличного от константы.
 17. Ряды Лорана, структура области сходимости. Доказательство теоремы Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
 18. Внутренняя теорема единственности (доказательство). Нули голоморфных функций. Факторизация голоморфной функции в окрестности её нуля.
 19. Изолированные особые точки голоморфной функции, их классификация. Критерии у.о.т. и полюса. Нахождение порядка полюса. Примеры.
 20. Критерий с.о.т. Теорема Сохоцкого о поведении голоморфной функции в проколотой окрестности её с.о.т.
 21. Бесконечность как и.о.т. голоморфной функции. Классификация и критерии и.о.т. на бесконечности.
 22. Определение вычета в и.о.т. и формулы для вычисления вычетов. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вычета на бесконечности. Теорема о сумме всех вычетов.
 23. Принцип аргумента, его геометрический смысл.
 24. Теорема Руше. Приложения теоремы Руше к полиномам.
 25. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций. Лемма Жордана и её применения.

V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. Карасев, И.П. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / И.П. Карасев. - М. : Физматлит, 2008. - 215 с. - ISBN 978-5-9221-0960-4 ; То же [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68139>
2. Малышева, Н.Б. Функции комплексного переменного: учебник / Н.Б. Малышева, Э.Р. Розендорн. - М. : Физматлит, 2010. - 168 с. - ISBN 978-5-9221-0977-2 ; То же [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68367>

б) дополнительная литература:

1. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операцион-

ное исчисление в примерах и задачах. [Электронный ресурс] / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 448 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/67463>

VI. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

1. ЭБС Лань <https://e.lanbook.com/> Договор № 4-е/23 от 02.08.2023 г.
2. ЭБС Znanium.com <https://znanium.com/> Договор № 1106 эбс от 02.08.2023 г.
3. ЭБС Университетская библиотека online <https://biblioclub.ru> Договор № 02-06/2023 от 02.08.2023 г.
4. ЭБС ЮРАЙТ <https://urait.ru/> Договор № 5-е/23 от 02.08.2023 г.
5. ЭБС IPR SMART <https://www.iprbookshop.ru/> Договор № 3-е/23К от 02.08.2023 г.

VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Для успешного усвоения материала данной учебной дисциплины, в частности, для выработки навыков решения задач необходима систематическая самостоятельная работа студентов по подготовке к практическим занятиям, коллоквиумам и к контрольным работам.

Организуя свою учебную работу, студенты должны:

Во-первых, выявить рекомендуемый режим и характер учебной работы по изучению теоретического курса, практическому применению изученного материала, по выполнению заданий для самостоятельной работы, по использованию информационных технологий и т.д.

Во-вторых, ознакомиться с указанным в методическом материале по дисциплине (модулю) перечнем учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям и выполнения самостоятельной работы, а также с методическими материалами на бумажных и/или электронных носителях, выпущенных кафедрой своими силами и предоставляемые студентам во время занятий.

1. Работа с учебными пособиями. Для полноценного усвоения курса студент должен, прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

2. Самостоятельное изучение тем. Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных

справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту и экзамену.

3. Подготовка к практическим занятиям. При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется следовать методическим рекомендациям по работе с учебными пособиями, приведенным выше.

4. Составление глоссария. В глоссарий должны быть включены основные понятия, которые студенты изучают в ходе самостоятельной работы. Для полноты исследования рекомендуется вписывать в глоссарий и те термины, которые студентам будут раскрыты в ходе лекционных занятий.

5. Составление конспектов. В конспекте отражены основные понятия темы. Для наглядности и удобства запоминания использованы схемы и таблицы.

6. Подготовка к экзамену. При подготовке к экзамену студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе лекций. Экзамен студенты могут сдавать в виде теста, контрольной работы или устного ответа по вопросам, представленным в данной программе. Для получения положительной оценки на экзамене необходимо продемонстрировать знания, не ниже базового (минимального) уровня. Процедура оценивания знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности обучающихся по дисциплине (модулю) производится в рамках балльно-рейтинговой системы, включая рубежную и текущую аттестации.

Максимальное количество баллов, которое может быть получено в результате освоения дисциплины составляет 100 баллов, из них 60 баллов отводится на текущий контроль (например, по 30 баллов на каждый модуль) и 40 баллов на промежуточную аттестацию.

Согласно подходам балльно-рейтинговой системы в рамках оценки знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности дисциплины (модуля) установлены следующие аспекты:

- Содержание учебной дисциплины в рамках одного семестра делится на два модуля (периода обучения). По окончании модуля (периода обучения) осуществляется рейтинговый контроль успеваемости знаний студентов.

- Сроки проведения рейтингового контроля:

весенний семестр – I рейтинговый контроль успеваемости проводится на 32-33 учебной неделе по графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

Самостоятельная работа студентов является неотъемлемой частью изучения дисциплины. Кроме того, в темах, изучаемых при контактной работе со студентами, есть отдельные учебные вопросы, которые студенты должны изучить самостоятельно. Контроль знаний при самостоятельном изучении тем и вопросов дисциплины осуществляется при проведении текущего контроля в виде устных опросов, письменных контрольных работ и тестирования во время рейтинг-контроля. Вопросы для самостоятельной работы также включаются в темы рефератов, которые студенты защищают на семинарских занятиях, и в перечень вопросов для экзамена.

При работе над текстом лекций студенту необходимо обратить особое внимание на проблемные вопросы, поставленные преподавателем при чтении лекции, а также на его задания и рекомендации. Работая над текстом лекции, необходимо иметь под рукой справочные издания: словарь-справочник, энциклопедический экономический словарь, в которых можно найти объяснение многим встречающимся в тексте терминам, содержание которых студент представляет себе весьма туманно, хотя они ему и знакомы.

В процессе организации самостоятельной работы большое значение имеют консультации с преподавателем, в ходе которых можно решить многие проблемы изучаемого курса, уяснить сложные вопросы.

Темы курсовых работ

1. Стереографическая проекция.
2. Голоморфные функции.
3. Гармонические функции.
4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.
5. Мёбиусовы преобразования. Группы мёбиусовых преобразований.
6. Мёбиусовы преобразования и геометрия Лобачевского.
7. Неподвижные точки мёбиусовых преобразований.

8. Экспонента, аналитические и геометрические свойства.
9. Тригонометрические и геометрические функции, аналитические и геометрические свойства.
10. Функция Жуковского, аналитические и геометрические свойства.
11. Принцип симметрии Римана-Шварца.
12. Криволинейные интегралы в ТФКП.
13. Интегральная теорема Коши и интегральная формула Коши.
14. Степенные ряды.
15. Ряды Тейлора.
16. Ряды Лорана.
17. Нули аналитических функций и внутренняя теорема единственности.
18. Изолированные особые точки аналитических функций.
19. Вычеты в изолированных особых точках аналитических функций.
20. Применение теоремы о вычетах для вычисления интегралов.
21. Применение теоремы о вычетах для вычисления интегралов.

Исследовательские задания

1. Конформный радиус области
2. Исследование локального поведения конформных отображений
3. Численное моделирование конформного отображения
4. Моделирование электростатических полей средствами ТФКП

VIII. Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (по необходимости)

При изучении дисциплины «Теория функций комплексного переменного» применяются общепринятые формы обучения: лекции и практические занятия, на которых широко используются элементы интерактивного обучения (активное, постоянное взаимодействие между преподавателем и студентом в процессе обу-

чения), самостоятельная работа студента (выполнение индивидуальных домашних заданий), консультации.

- 1) Проведение лекционных занятий в аудитории и в компьютерном классе,
- 2) Выполнение студентами индивидуальных заданий на практических занятиях (в компьютерном классе),

Программное обеспечение:

Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
<p>Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория. Математический кабинет № 213 (Корпус 3, 170002, Тверская обл., г.Тверь, пер. Садовый, дом 35)</p>	<p>Google Chrome бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022 Lazarus бесплатно OpenOffice бесплатно Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО бесплатно ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО бесплатно</p>
<p>Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 224 (Корпус 3, 170002, Тверская обл., г.Тверь, пер. Садовый, дом 35)</p>	<p>Google Chrome бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022 Lazarus бесплатно OpenOffice бесплатно Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО бесплатно ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО бесплатно</p>
<p>Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 318 (Корпус 3, 170002, Тверская обл., г.Тверь, пер. Садовый, дом 35)</p>	<p>Google Chrome бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022 Lazarus бесплатно OpenOffice бесплатно Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО бесплатно ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО бесплатно</p>

IX. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы
--	---

<p>ты</p> <p>Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория. Математический кабинет № 213 (Корпус 3, 170002, Тверская обл., г.Тверь, пер. Садовый, дом 35)</p>	<p>Набор учебной мебели, меловая доска, Переносной ноутбук, Компьютер:(процессор Core i5-2400+монитор LC E2342T (10шт.) Графопроектор, мультимедийный комплект учебного класса (вариант № 1) Проектор Casio XJ-M140, кронштейн, кабель, удлинитель, настенный проекц. экран Lumien 180*180.</p>
<p>Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 224 (Корпус 3, 170002, Тверская обл., г.Тверь, пер. Садовый, дом 35)</p>	<p>Набор учебной мебели, меловая доска, Переносной ноутбук, Мультимедийный проектор BenQ MP 724 с потолочным креплением и экраном 1105</p>
<p>Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 318 (Корпус 3, 170002, Тверская обл., г.Тверь, пер. Садовый, дом 35)</p>	<p>Набор учебной мебели, меловая доска, Переносной ноутбук; Проектор Panasonic PT-VW340ZE; Экран настенный Draper Star.</p>

Х. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины (или модуля)

№п. п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины (или модуля)	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения
1.	V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	Обновление списка литературы.	Протокол № 11 от 26.06.2013
2.	VII. Методические указания для обучающихся по	Корректировка планов практических (семинарских) занятий и ме-	Протокол № 10 от 24.06.2014

	освоению дисциплины	тодических рекомендаций к ним.	
3.	V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	Обновление списка литературы. Обновление ссылок из ЭБС.	Протокол № 1 от 27.09.2015
4.	VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.	Корректировка планов практических (семинарских) занятий и методических рекомендаций к ним.	Протокол № 1 от 01.09.2016
5.	I - X	Корректировка всех разделов в соответствии с новым стандартом	Протокол № 6 от 28.02.2017
6.	V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	Дополнение списков. Обновление ссылок из ЭБС.	Протокол № 1 от 01.09.2017
7.	V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	Дополнение списков. Обновление ссылок из ЭБС.	Протокол № 1 от 01.09.2023