

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич
Должность: врио ректора
Дата подписания: 10.08.2023 16:34:14
Уникальный программный ключ:
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:



Руководитель ООП

Б.Б.Педько

«28»

июня

2022 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Векторный и тензорный анализ

Направление подготовки

03.03.03 Радиофизика

профиль

Физика и технология материалов и устройств радиоэлектроники

Для студентов

2 курса, очной формы обучения

Составитель: к.ф.-м.н., доцент Зубков В.В.

Тверь, 2022

I. Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины является:

формирование и развитие у обучающихся компетенций в области векторного и тензорного анализа и его приложений к физическим и техническим задачам.

Задачами освоения дисциплины являются:

- освоение основных понятий и идей, лежащих в основе современного тензорного анализа;
- овладение навыками и приемами решения задач в области современной физики, связанных с использованием векторного и тензорного исчисления.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» изучается в модуле Математика Блока 1. Дисциплины обязательной части учебного плана ООП.

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» основывается на знаниях студентов в области математического анализа и линейной алгебры. Призвана сформировать у студента современное представление о векторных и тензорных описаниях физических величин и геометрических методах математической физики. Данная дисциплина тесно связана со всеми разделами теоретической физики, а также дисциплинами, посвященными методам описания конденсированной среды.

«Векторный и тензорный анализ» формирует у студента компетенции, которые будут в дальнейшем использоваться как при изучении дисциплин по углублению профессиональных компетенций.

3. Объем дисциплины: 2 зачетных единицы, 72 академических часа, **в том числе:**

контактная аудиторная работа: лекции 17 часов, практические занятия 17 часов;

самостоятельная работа: 38 часов.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие; УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи; УК-1.5. Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки.
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физики и радиофизики и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности.	ОПК-1.1. Применяет базовые знания в области физико-математических наук для решения задач профессиональной деятельности

5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения

Зачет в 3 семестре.

6. Язык преподавания: русский.

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий.

1. Для студентов очной формы обучения

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Самостоятельная работа, в том числе Контроль (час.)
		Лекции		Практические занятия		
		всего	в т.ч. ПП	всего	в т.ч. ПП	
<p>Тема 1. Элементы векторной алгебры Общее определение вектора. Скалярное произведение. Метрический тензор. Взаимный базис. Ко- и контравариантные компоненты. Регулярные криволинейные координаты. Координатные линии и поверхности. Коэффициенты Ламэ. Ортогональные координаты. Физические компоненты векторов. Пример: скорость в криволинейной системе координат. Символ Леви-Чивиты. Векторное произведение. Смешанное произведение. Двойное векторное произведение. Вычисление объема, построенного на заданных векторах. Пример. Зона Бриллюэна – ячейка Вигнера-Зейтца в обратном пространстве. Поворот и инверсия. Аксиальные и полярные векторы. Пример: напряженность электрического поля и напряженность магнитного поля.</p>	10	3		3		4
<p>Тема 2. Основы векторного анализа <i>Векторные и скалярные поля.</i> Производная по направлению. Линии уровня. Градиент скалярного поля. Оператор Гамильтона. Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского-Гаусса. Ротор векторного поля. Теорема Стокса. Формула Грина. Оператор Лапласа. Первая и вторая формулы Грина. Теорема Гельмгольца. Пример: уравнения Максвелла. Векторный потенциал. <i>Дифференциальные операции в криволинейной системе координат.</i></p>	26	4		4		18

<p>Элемент длины, площади и объема. Градиент. Ковариантная производная. Дивергенция. Символы Кристоффеля первого и второго рода. Оператор Лапласа. Векторное произведение в криволинейной системе координат. Ротор. Пример: ускорение, второй закон Ньютона в криволинейных координатах, уравнение Лагранжа второго рода.</p>						
<p>Тема 3. Тензорная алгебра</p> <p>Начальные представления о тензорах. Операции над тензорами: сложение, свертка, тензорное умножение, симметрирование, альтернирование. Кососимметричный тензор. Примеры. Инвариантные тензоры. Изотропные тензоры. Деватор, шаровой тензор. Собственные значения и векторы тензора. Тензор деформации. Закон Гука. Инварианты Тензора. Тензорная поверхность. Тензор ЭМ поля. Понятие относительного тензора.</p> <p>Геометрический взгляд на тензоры. Множества и топология. Карты и атлас. Гладкая структура. Дифференцируемое многообразие. Скалярная функция на многообразии. Векторное поле на многообразии. Сопряженное пространство. 1-форма. Определение тензора. Дифференциальные формы и поливекторы. Дифференциальная форма максимальной степени. Относительный тензор. Оператор Ходжа (Ходжевская дуальность).</p>	8	2		2		4
<p>Тема 4. Тензорный анализ</p> <p>Начальные представления. Дифференцирование тензоров. Дифференциал тензора, градиент тензора. Дивергенция тензора. Теорема Риччи. Примеры. Двукратное дифференцирование тензоров. Интегрирование тензоров. Теоремы Остроградского-Гаусса и Стокса.</p> <p>Современный взгляд. Внешняя производная дифференциальной формы, свойства внешней производной.</p>	10	3		3		4
<p>Начальные представления. Дифференцирование тензоров. Дифференциал тензора, градиент тензора. Дивергенция тензора. Теорема Риччи. Примеры. Двукратное дифференцирование тензоров. Интегрирование тензоров. Теоремы Остроградского-Гаусса и Стокса.</p> <p>Современный взгляд. Внешняя производная дифференциальной формы, свойства внешней производной.</p>	9	2		3		4
<p>Современный взгляд. Внешняя производная дифференциальной формы, свойства внешней производной.</p>	9	3		2		4

<p>Замкнутые и точные дифференциальные формы. Лемма Пуанкаре. Форма объема. Дифференциальные операторы векторного анализа (дивергенция, лапласиан, ротор) на языке внешнего дифференцирования. Основные тождества векторного анализа как следствия свойств внешнего дифференциала. Пример. Уравнения электродинамики на языке дифференциальных форм. Интеграл от дифференциальной формы. Общая интегральная формула Стокса. Теорема Гаусса о дивергенции. Формулы Грина, Остроградского-Гаусса и Стокса как частные случаи общей формулы Стокса.</p>						
ИТОГО	72	17		17		38

III. Образовательные технологии

Учебная программа-наименование разделов и тем	Вид занятия	Образовательные технологии
Тема 1. Элементы векторной алгебры	<i>Лекции, занятия</i> <i>практические</i>	<i>Активное слушание. Решение индивидуальных задач</i>
Тема 2. Основы векторного анализа <i>Векторные и скалярные поля.</i>	<i>Лекции, занятия</i> <i>практические</i>	<i>Активное слушание. Решение индивидуальных задач</i>
<i>Дифференциальные операции в криволинейной системе координат.</i>	<i>Лекции, занятия</i> <i>практические</i>	<i>Активное слушание. Решение индивидуальных задач</i>
Тема 3. Тензорная алгебра		
<i>Начальные представления о тензорах.</i>	<i>Лекции, занятия</i> <i>практические</i>	<i>Активное слушание. Решение индивидуальных задач</i>
<i>Геометрический взгляд на тензоры.</i>	<i>Лекции, занятия</i> <i>практические</i>	<i>Активное слушание. Решение индивидуальных задач</i>
Тема 4. Тензорный анализ.		
<i>Начальные представления.</i>	<i>Лекции, занятия</i> <i>практические</i>	<i>Активное слушание. Решение индивидуальных задач</i>

<i>Современный взгляд.</i>	<i>Лекции, занятия</i>	<i>практические</i>	<i>Активное слушание. Решение индивидуальных задач</i>
----------------------------	------------------------	---------------------	--

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

Форма проведения зачета: студенты, освоившие программу курса «Векторный и тензорный анализ» могут получить зачет по итогам семестровой и полусеместровой рейтинговой аттестации согласно «Положению о рейтинговой системе обучения ТвГУ» (протокол №8 от 30 апреля 2020 г.).

Для проведения текущей и промежуточной аттестации:

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач:

УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие;

УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи;

УК-1.5. Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки.

Для всех индикаторов один способ аттестации.

Пример 1:

Задание:

Доказать тождество Лагранжа

$$[a \times b][c \times d] = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix}$$

Способ аттестации: письменная самостоятельная индивидуальная работа.

Критерии оценки: **1. Низкий уровень (1 балл),** если студент может записать выражение для векторного и скалярного произведений. Имеет представление о символах Леви-Чивита для записи векторного произведения. Проводит расчеты с ошибками. **2. Средний уровень (2 балла),** если студент может записать выражение для векторного и скалярного произведений. Уверенно

использует символы Леви-Чивита для записи векторного произведения. Проводит доказательство с некоторыми недочетами. **2. Высокий уровень (3 балла)**, если записать выражение для векторного и скалярного произведений. Уверенно использует символы Леви-Чивита для записи векторного произведения. Правильно проводит расчеты.

Пример 2:

Задание:

1. Показать, что поле $\mathbf{a} = \text{grad}\psi \times \text{grad}\varphi$ является вихревым. Здесь φ, ψ – скалярные поля.
2. Показать, что векторное поле $\mathbf{a} = \frac{f(r)}{r} \mathbf{r}$ является потенциальным, найти его потенциал.
3. Найти лапласиан скалярного поля $f = c\rho(3R - 2\rho)\cos\varphi$, заданного в цилиндрических координатах.

Способ аттестации: письменная самостоятельная работа.

Критерии оценки: **1 балл**, если правильно решил только одну задачу;

2 балла, если правильно решил две задачи, или три задачи, но с некоторыми ошибками;

3 балла, если правильно решил все три задачи.

ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физики и радиофизики и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности:

ОПК-1.1. Применяет базовые знания в области физико-математических наук для решения задач профессиональной деятельности;

Пример 1:

Задание: Сформулируйте и запишите математическую формулировку теоремы Остроградского-Гаусса. Привести пример из физики.

Способ аттестации: Беседа со студентом

Критерии оценки: **1. Высокий уровень:** Знает формулировку теоремы Остроградского-Гаусса. Записывает ее. Понимает физическое содержание. **2. Средний уровень.** Записывает математическое выражение для теоремы Остроградского-Гаусса. Путается в формулировке и физическом содержании. **3. Низкий уровень:** Неуверенно записывает математическое выражение для теоремы Остроградского-Гаусса. Не знает о физическом (смысловом) содержании. Путается в формулировке.

Пример 2. Задание: Пространство Минковского E_4 с метрикой $G = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Тензор электромагнитного поля

$$F = (F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Показать, что инварианты электромагнитного поля имеют вид

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = \text{invar},$$

$$(\mathbf{E}\mathbf{H})^2 = \text{invar}$$

и прояснить физический смысл этих инвариантов.

Способ аттестации: письменная самостоятельная работа и собеседование по ее результатам.

Критерии оценки: 1 балл, если имеет представление о метрике, о кососимметричном тензоре и об инвариантах тензорного поля второго ранга.

2 балла, если к тому же может объяснить и записать общую формулу для вычисления инвариантов тензора второго ранга.

3 балла, если к тому же объяснил физический смысл.

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

а) Основная литература:

1. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. 1937. 454 с. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=105572&sr=1>
2. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005, 584 с. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=61810&sr=1>
3. Гордиенко А. Б. , Золотарев М. Л. , Кравченко Н. Г. Основы векторного и тензорного анализа: учебное пособие. Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2009, 133 с. Электронный ресурс. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=232488&sr=1

б) Дополнительные источники:

1. Келлер И.Э. Тензорное исчисление. СПб: «Лань», 2012. 176 с. Электронный ресурс. - Режим доступа: <http://e.lanbook.com/view/book/3814/>
2. Акивис М. А. , Гольдберг В. В. Тензорное исчисление: учебное пособие М.: Физматлит, 2005, 305 с. Электронный ресурс. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=67297&sr=1

2) Программное обеспечение

а) Лицензионное программное обеспечение (математический пакет Maple)

б) Свободно распространяемое программное обеспечение (математический пакет Maxima)

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1.ЭБС«ZNANIUM.COM» www.znanium.com;

2.ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/>;

3.ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Вопросы к зачету для оценивания теоретических знаний, как правило, соответствуют разделам лекций и выкладываются преподавателем на страницу курса в Teams.

Необходимым требованием для сдачи зачета является решение задач, условия которых приведены в лекционном курсе. Обновленные варианты лекций выкладываются преподавателем на страницу курса в Teams.

– методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов.

1. Изучить рекомендуемую литературу.
2. Просмотреть задачи, разобранные на аудиторных занятиях.
3. Разобрать задачи, рекомендованные преподавателем для самостоятельного решения, используя, при необходимости, примеры решения аналогичных задач.
4. Обсудить проблемы, возникшие при решении задач или освоении теоретического материала с преподавателем.

– примеры вопросов и задач к зачету:

1. Определение вектора.
2. Определение скалярного и векторного произведений векторов.
3. Найти скалярные произведения векторов $\mathbf{a}^T = (-4, 1, 1)$ и $\mathbf{b}^T = (1, 2, -2)$, если

метрика имеет вид $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти также контравариантные компоненты

указанных векторов.

4. Записать в векторном (инвариантном) виде $a_i b^n c^k \varepsilon_{klm} a^l \delta_n^i b^m$

5. Используя символы Леви-Чивиты, доказать тождество $[a \times [b \times c]] = b(ac) - c(ab)$.
6. Определения градиента скалярного поля и производной по направлению.
7. Найти угол между градиентами поля

$$\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

в точках $A(1, 2, 2)$ и $B(-3, 1, 0)$.

8. Найти производную скалярного поля $\varphi(x, y, z)$ по направлению градиента скалярного поля $\psi(x, y, z)$. При каком условии она равна нулю?
9. Определение векторных линий векторного поля. Примеры.
10. Найти векторную линию векторного поля $\mathbf{r} = \mathbf{i} \exp(x) + \mathbf{j} \exp(-y) + \mathbf{k}z$, проходящую через точку $P(-1, 0, 1)$.
11. Определения дивергенции и ротора векторного поля.
12. Потенциальное, соленоидальное поле. Примеры из физики.
13. Теорема Гельмгольца о разложении векторного поля.
14. Лапласиан скалярного поля.
15. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\mathbf{A} = \frac{x+y+z}{xyz} \mathbf{r}$.
16. Доказать, что векторное поле $\mathbf{A} = \mathbf{a} \times \text{grad} \varphi$, где \mathbf{a} – постоянный вектор, является вихревым.
17. Сформулируйте теоремы Остроградского-Гаусса и Стокса.
18. Доказать тождество $\text{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (b, \text{rota}) - (a, \text{rot}b)$.
19. Доказать тождество $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - [\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}]$.
20. Доказать тождество $\int_V (\text{grad} \varphi, \text{rota}) dV = \int_S \varphi (\text{rota}, d\mathbf{S})$.
21. Определение коэффициентов Ламэ. Физические компоненты вектора.
22. Определение символов Кристоффеля первого и второго рода.
23. Дан вектор своими физическими компонентами в псевдоцилиндрических координатах:

$$A_{r\psi} = r^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sin \psi$$

$$A_{\psi\phi} = -r^2 \sqrt{a^2 + b^2} \cos \psi$$

$$A_{z\phi} = r^2$$

Найти ротор и дивергенцию этого векторного поля. Псевдоцилиндрические координаты $q^1 = r$, $q^2 = \psi$, $q^3 = z$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \psi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

$$\begin{cases} x = ar \sin \psi, \\ y = br \cos \psi, \\ z = z. \end{cases}$$

24. Определение тензора типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

25. Тензорное произведение тензоров. Пример: диада.

26. Операции симметрирования и альтернирования. Проиллюстрировать на примере тензора второго ранга.

27. Ковариантная производная вектора и тензора второго ранга типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

28. В некотором базисе тензор T типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ имеет координаты $(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Даны

также векторы $(x^k) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ и $(y^k) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Метрический тензор имеет координаты

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти}$$

а. (T^{ij}) и $(T_{i\Box}^{\Box j})$, б. $T_{ij}y^j$, в. $T \otimes x$, д. $Sp_2^1(T \otimes x)$, е. $Sp_{12}^{12}(T \otimes x \otimes y)$

29. Доказать, что $T_{[\alpha[\beta S_{\mu]\nu]}]} = \frac{1}{4}(T_{\alpha\beta}S_{\mu\nu} - T_{\alpha\mu}S_{\beta\nu} - T_{\nu\beta}S_{\mu\alpha} + T_{\nu\mu}S_{\beta\alpha})$

30. Используя понятие инвариантов тензора, показать, что инварианты тензора электромагнитного поля имеют вид

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = \text{invar},$$

$$(\mathbf{EH})^2 = \text{invar}$$

31. Показать, что дивергенцию тензора второго ранга $T = T^{ij} e_i \otimes e_j$ можно представить в следующем виде:

$$\nabla \cdot T = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} T^{mj} e_j)}{\partial x^m}.$$

32. Теорема Риччи.

33. Градиент тензора. Определение. Пример: градиент вектора.

34. Доказать, что градиент скалярного произведения двух векторов $\nabla(ab)$ можно представить в виде:

$$\nabla(ab) = (\nabla \otimes a) \cdot b + (\nabla \otimes b) \cdot a.$$

35. Доказать, что дивергенция от градиента тензора второго ранга является тензором второго ранга. Запишите его компоненты.

– *примеры расчетно-графических работ:*

1. Системы криволинейных координат.
2. Торoidalная система координат. Лапласиан скалярной функции.
3. Трёхмерные параболические координаты. Лапласиан скалярной функции.
4. Эллипсоидальные координаты. Лапласиан скалярной функции.
5. Параболоидальные координаты. Лапласиан скалярной функции.
6. Бицилиндрические координаты. Лапласиан скалярной функции.
7. Биполярные координаты. Лапласиан скалярной функции.
8. Параболические координаты. Лапласиан скалярной функции.
9. Конические координаты. Лапласиан скалярной функции.
10. Координаты эллиптического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
11. Координаты параболического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
12. Торoidalная система координат. Градиент скалярной функции.
13. Трёхмерные параболические координаты. Градиент скалярной функции.
14. Эллипсоидальные координаты. Градиент скалярной функции.
15. Параболоидальные координаты. Градиент скалярной функции.

16. Бицилиндрические координаты. Градиент скалярной функции.
17. Биполярные координаты. Градиент скалярной функции.
18. Параболические координаты. Градиент скалярной функции.
19. Конические координаты. Градиент скалярной функции.
20. Координаты эллиптического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
21. Координаты параболического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.

VII. Материально-техническое обеспечение

Наименование специальных помещений	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации Лекционная аудитория № 227 (170002 Тверская обл., г. Тверь, Садовый пер., д. 35)	1. Проектор Panasonic PT-VW340ZE 2. экран ScreenMedia 3. Ноутбук (переносной) 4. Комплект учебной мебели на 60 посадочных мест 5. Меловая доска	Microsoft Windows 10 Enterprise - Акт на передачу прав №785 от 06.08.2021 г. MS Office 365 pro plus - Акт на передачу прав №1051 от 05.08.2020 г. Acrobat Reader DC - бесплатно Google Chrome – бесплатно
Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Лекционная аудитория № 218 (170002 Тверская обл., г. Тверь, Садовый пер., д. 35)	1. Комплект учебной мебели на 25 посадочных мест. 2. Экран настенный Screen Media 153x203 3. Переносной комплект мультимедийной техники (ноутбук, проектор). 4. Меловая доска	Microsoft Windows 10 Enterprise - Акт на передачу прав №785 от 06.08.2021 г. MS Office 365 pro plus - Акт на передачу прав №1051 от 05.08.2020 г. Acrobat Reader DC - бесплатно Google Chrome – бесплатно

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№ п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Реквизиты документа, утвердившего изменения
1.			
2.			