Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

А.А. ГОЛУБЕВ

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие

ТВЕРЬ 2022

УДК 517.2(075.8)
ББК В161.11я73-1
Г62

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук доцент кафедры математического анализа Тверского государственного университета О.Е. Баранова;

кандидат физико-математических наук доцент кафедры высшей математики Тверского государственного технического университета М.А. Шестакова

Голубев, А.А.
Г62 Числовые и функциональные ряды: учеб. пособие / А.А. Голубев. – Тверь: издательство Тверского государственного университета, 2022. – 178 с.

ISBN 978-5-7609-1722-5

Представлены основные понятия и теоремы теории числовых и функциональных рядов. Рассмотрены решения типовых задач. Приведены задания для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов математических факультетов.

УДК 517.2(075.8)
ББК В161.11я73-1

Печатается по решению учебно-методического совета Тверского государственного университета (заседание № 4 от 16 февраля 2022 г.).

ISBN 978-5-7609-1722-5

Памяти Геннадия Аркадьевича Смирнова,
чьи лекции (и рукопись) легли в основу
этой работы, п о с в я щ а е т с я

Предисловие

Математический анализ является одной из важнейших частей современной математики. На его изучение отводятся два учебных года, и полный курс дисциплины составляет, как правило, несколько томов. Однако имеется необходимость в сжатом изложении основных разделов и тем математического анализа, что особенно важно при подготовке к текущим и государственным экзаменам. Данное пособие призвано помочь студентам математических факультетов в этой подготовке.

Предлагаемое учебное пособие является продолжением ранее изданных пособий «Введение в анализ» [4] в соавторстве с кандидатом физико-математических наук доцентом В.Ю. Суетиным и «Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного действительного переменного» [3]. В нём не только освещаются все пункты экзаменационной программы по дисциплине «Математический анализ» за первый семестр второго курса, но и даются ответы на дополнительные вопросы, которые часто возникают у экзаменаторов при прослушивании ответов студентов.

Пособие включает предисловие, шесть глав, разбитых на параграфы, заключение, список литературы.

При написании учебного пособия использовались лекции (в частности, сохранившиеся рукописи по числовым и функциональным рядам), прочитанные прекрасным педагогом Геннадием Аркадьевичем Смирновым в последние годы его жизни. Структурно выверенные, изложенные понятным и чётким языком, эти лекции явились для автора пособия образцом педагогической деятельности.

Пособие подробно и доступно освещает материал по темам «Числовые Ряды», «Функциональные ряды», «Степенные ряды», «Ряды Тейлора», «Ряды Фурье», изучаемым на занятиях по дисциплине «Математический анализ» в первом семестре второго курса на математическом факультете (направление 01.03.01 «Математика», профили «Преподавание математики и информатики» и «Фундаментальная и прикладная математика»; специальность 10.05.01 «Компьютерная безопасность» со специализацией «Математические методы защиты информации»).

Дисциплина «Математический анализ» относится к обязательной части блока 1 учебного плана – к дисциплинам, формирующим универсальные и общепрофессиональные компетенции, по направлению подготовки 01.03.01 «Математика» и по специальности 10.05.01 «Компьютерная безопасность». Предлагаемое учебное пособие призвано помочь в решении задач в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования. В результате изучения дисциплины обучающиеся должны иметь базовые знания в области фундаментальной математики, уметь формулировать и доказывать теоремы, самостоятельно решать классические задачи математики, владеть навыками практического использования математических методов при анализе различных задач, при этом студенты должны быть способны осуществлять отбор теоретического и практического материала, решать типовые задачи в рамках профессиональной деятельности, использовать различные методы и приёмы решения задач профессиональной деятельности.

Также пособие позволит сформировать и развить у обучающихся по направлению 01.03.01 «Математика» общепрофессиональную компетенцию ОПК-1 «Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности», а у обучающихся по специальности 10.05.01 «Компьютерная безопасность» – общепрофессиональную компетенцию ОПК-3 «Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности».

Автор пособия выражает глубокую благодарность за участие и поддержку в подготовке и опубликовании данного пособия кандидату физико-математических наук доценту кафедры математического анализа Ольге Евгеньевне Барановой.

ГЛАВА I. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. Понятие числового ряда и его суммы. Необходимый признак сходимости числового ряда

Определение 1. Пусть дана последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$. Символ вида

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \qquad (1)$$

называют числовым рядом.

Числа $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ называют первым, вторым и т. д. членами ряда. Выражение z_n называют n-м или общим членом ряда.

Заметим, что в определении 1 числа $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, в частности, могут быть действительными.

Примеры

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$; общий член ряда равен $z_n = \frac{1}{n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$; $z_n = \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$.
3. $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$; $z_n = n$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2+3i}{10}\right)^n$; $z_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{2+3i}{10}\right)^n$.

Пусть дан ряд (1). Образуем последовательность чисел

$S_1 = z_1$;

$S_2 = z_1 + z_2$;

$S_3 = z_1 + z_2 + z_3$;

$\dots$

$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$;

$\dots$.

Последовательность $\{S_n\}$ называют последовательностью частных (частичных) сумм ряда (1).

Определение 2. Если последовательность частных сумм $\{S_n\}$ ряда (1) является сходящейся, то ряд (1) называют сходящимся, а число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – его суммой.

В случае выполнения определения 2 используют запись

$$S = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Если последовательность $\{S_n\}$ расходится, то ряд (1) называют расходящимся.

Примеры

1. $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\ \ldots$.

Заметим, что $\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, $n=2,3,\ldots$. Тогда

$$S_n=1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=$$
$$=1+\left(1-\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n}\right)=\ 2-\tfrac{1}{n},$$
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\tfrac{1}{n}\right)=2.$$

Ряд сходится и его сумма равна 2.

$$2=1+\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\tfrac{1}{(n-1)n}+\ \ldots .$$

2. $1+2+3+\ldots+n+\ \ldots$.

$S_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$. Ряд расходится.

3. $1-1+1-1+1-1+\ \ldots$.

$S_1=1;\ S_2=0;\ S_3=1;\ S_4=0;\ \ldots\ .\ S_n=\begin{cases}1, \text{если } n \text{ нечётное},\\ 0, \text{если } n \text{ чётное}\end{cases}.$

Предела $\{S_n\}$ не существует, ряд расходится.

Замечание. Итак, видим, что если дан ряд

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}z_n, \qquad (1)$$

то ему в соответствие ставится последовательность $\{S_n\}$, где $S_n=\sum_{k=1}^{n}z_k$, сходимость которой изучается.

Обратно, если дана последовательность $\{S_n\}$, то можно построить ряд, частными суммами которого будут члены последовательности $\{S_n\}$. Этот ряд имеет вид

$$S_1+(S_2-S_1)+(S_3-S_2)+\ldots+(S_n-S_{n-1})+\ \ldots .$$

Таким образом, становится понятным, что теория рядов есть иная форма теории последовательностей.

Из определения сходимости ряда вытекает простой результат.

Теорема (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд (1) сходится, то при $n\to\infty$ общий член ряда z_n стремится к нулю.

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится. Тогда в прежних обозначениях имеем

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Теорема выражает необходимый признак сходимости ряда. Из него вытекает, что если общий член ряда при $n \to \infty$ не стремится к нулю, то ряд расходится.

Примеры

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ \ldots$. Общий член ряда $z_n = n \to \infty$ (а значит не стремится к нулю), следовательно ряд расходится.

2. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ \ldots$, $z_n = (-1)^{n+1}$ не стремится к нулю при $n \to \infty$, следовательно ряд расходится.

Замечание 2. Необходимый признак сходящегося ряда не является достаточным, то есть ряд с общим членом, стремящимся к нулю, может расходиться.

Пример

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ \ldots$. Заметим, что $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to \infty$. Далее $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, и так как $\sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$, то и $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Таким образом, ряд расходится.

В заключение рассмотрим важный в теории рядов пример числового ряда.

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots,$$

где $a \neq 0$, q – комплексные числа. Образуем ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ \ldots.$$

Этот ряд обычно называют суммой геометрической прогрессии. Выясним, когда этот ряд сходится.

Ясно, что если $|q| \geq 1$, то ряд расходится. Действительно, рассмотрим общий член ряда $z_n = aq^{n-1}$. Имеем $|z_n| = |a||q|^{n-1} \geq |a|$. Так как $|a| \neq 0$, то $|z_n|$ не стремится к нулю при $n \to \infty$ и, следовательно, z_n не стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, в силу необходимого признака ряд расходится.

Пусть теперь $|q| < 1$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}|q^n| = \lim\limits_{n\to\infty}|q|^n = 0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Далее

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1},$$

$$S_n q = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n.$$

Вычтем из первой суммы вторую. Получим $S_n(1-q) = a(1-q^n)$, откуда

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n\right) = \frac{a}{1-q}$.

Итак, при $|q| \geq 1$ ряд расходится, а при $|q| < 1$ ряд сходится и

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ \ldots .$$

§ 2. Некоторые простейшие сведения о рядах

1. Критерий Коши сходимости числового ряда

Пусть дан ряд

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ \ldots , \tag{1}$$

и пусть $\{S_n\}$ – последовательность его частных сумм. Сходимость ряда (1) равносильна сходимости последовательности $\{S_n\}$. Мы знаем, что во множестве комплексных чисел выполняется критерий Коши, так как это полное метрическое пространство[1]. Тогда для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n\ \forall m\ \big((n > N)\wedge(m > N) \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon\big).$$

В этом соотношении n и m – любые натуральные числа, поэтому можно всегда считать $m > n$. Тогда $S_m - S_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_m$ и для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n\ \forall m\ \big((m > n > N) \Rightarrow (|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_m| < \varepsilon)\big).$$

Полагая в последнем соотношении $m = n + p$, где $p \geq 1$, получаем утверждение.

Теорема (критерий Коши сходимости числового ряда). Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \forall p \Big(\big((n > N) \wedge (p \geq 1)\big) \Rightarrow \big(|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon\big)\Big).$$

---

[1] Голубев А.А., Суетин В.Ю. Введение в анализ. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2007. – С. 61–64.

2. Остаток ряда

Пусть дан ряд (1). Фиксируем произвольное натуральное число n и отбросим n первых члена ряда. Получим ряд

$$R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+k} + \ \ldots ,$$

который называют остатком (или рядом-остатком) ряда (1).

Пусть $S_k^{'} = z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+k}$ – частная сумма ряда-остатка, а S_p – частная сумма ряда (1), причём $p = n + k$. Тогда

$$S_p = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + z_{n+1} + \ldots + z_{n+k} = S_n + S_k^{'}.$$

Ясно, что $p \to \infty$ тогда и только тогда, когда $k \to \infty$.

Из равенства $S_p = S_n + S_k^{'}$ следует, что сходимость ряда (1) эквивалентна сходимости его ряда-остатка. Таким образом, сходимость или расходимость ряда не нарушается при отбрасывании нескольких первых его членов. Этим обстоятельством мы будем часто пользоваться.

При этом сумма S сходящегося ряда равна сумме суммы S_n (суммы отбрасываемых членов) и суммы $S^{'}$ ряда-остатка: $S = S_n + S^{'}$.

Далее, пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится к сумме S. Тогда можно написать

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{n} z_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = S_n + R_n.$$

Отсюда $R_n = S - S_n \to S - S = 0$ при $n \to \infty$. Итак, с возрастанием номера остаток сходящегося ряда стремится к нулю.

3. Умножение ряда на число. Сложение и вычитание рядов

Теорема 1. Пусть дан сходящийся ряд

$$S = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ \ldots \tag{1}$$

и M – некоторое комплексное число. Образуем новый ряд

$$Mz_1 + Mz_2 + \ldots + Mz_n + \ \ldots . \tag{2}$$

Тогда ряд (2) сходится к сумме MS.

Доказательство. Обозначим через S_n n-ю частную сумму ряда (1), а через S_n' – n-ю частную сумму ряда (2). Так как ряд (1) сходится и его сумма равна S, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n' = \lim_{n\to\infty} (Mz_1 + Mz_2 + \ldots + Mz_n) = M \lim_{n\to\infty} (z_1 + z_2 + \ldots + z_n) =$$

$$= M \lim_{n\to\infty} S_n = MS.$$

То есть ряд (2) сходится и его сумма равна MS.

Теорема 2. Пусть даны сходящиеся ряды $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ и $S' = \sum_{n=1}^{\infty} z_n'$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n \pm z_n')$ сходится и его сумма равна $S \pm S'$.

Доказательство. Обозначим через S_n n-ю частную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, а через S'_n – n-ю частную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z'_n$. Тогда n-я частная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n \pm z'_n)$ равна

$$S''_n = \sum_{k=1}^{n}(z_n \pm z'_n) = \sum_{k=1}^{n} z_n \pm \sum_{k=1}^{n} z'_n = S_n \pm S'_n\ ,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} S''_n = \lim_{n\to\infty}(S_n \pm S'_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} S'_n = S \pm S'.$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n \pm z'_n)$ сходится к сумме $S \pm S'$.

4. Связь между рядами с комплексными и действительными числами

Пусть дан ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ \ldots, \tag{1}$$

где $z_n = a_n + ib_n, n = 1, 2, \ldots$. Образуем ряды из действительных и мнимых частей членов ряда (1)

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ \ldots, \tag{3}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ \ldots\ . \tag{4}$$

Теорема 3. Для того чтобы комплексный ряд (1) сходился к числу $S = A + iB$ необходимо и достаточно, чтобы действительные ряды (3) и (4) сходились к числам A и B соответственно.

Доказательство. Эта теорема вытекает из равенства

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + i(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

и известного утверждения о связи предела последовательности комплексных чисел с пределами реальных и мнимых частей (теоремы о покоординатной сходимости).

Теорема 3 говорит о том, что изучение рядов в общем виде можно свести к изучению рядов с действительными членами.

§ 3. Признаки сравнения положительных рядов

Если дан какой-либо ряд, то является важным установление факта сходимости или расходимости данного ряда. Применение для этого критерия Коши, как правило, затруднительно. Поэтому желательным является выяснение удобных на практике признаков сходимости рядов. Рассмотрение таких признаков мы начнём для рядов с действительными и неотрицательными членами.

Ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ \ldots\ . \tag{1}$$

будем называть положительным, если $a_n \geq 0, n = 1, 2, \ldots$.

Начнём с простого вспомогательного предложения.

Теорема 1. Для того чтобы положительный ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{A_n\}$ его частных сумм была ограничена сверху.

Доказательство. 1. Необходимость. Сходимость ряда есть сходимость последовательности его частных сумм. Но сходящаяся последовательность ограничена.

2. Достаточность. Для положительного ряда последовательность его частных сумм, очевидно, является неубывающей

$$A_1 \leq A_2 \leq \ \dots \ \leq A_n \leq \ \dots .$$

Если же последовательность $\{A_n\}$ ограничена сверху, то по известной теореме она имеет предел. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим признаки сравнения рядов.

Теорема 2. Пусть даны положительные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{2}$$

и $a_n \leq b_n$ для всех n. Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1) (то есть из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2)).

Доказательство. Пусть $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ – частные суммы рядов (1) и (2) соответственно. Так как $a_n \leq b_n$ для всех n, то и

$$A_n \leq B_n \tag{3}$$

для всех n.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$ (ряд (2) сходится к сумме B). Так как $\{B_n\}$ – неубывающая последовательность, то $B_n \leq B$ для всех n и из неравенств (3) вытекает, что

$$A_n \leq B$$

для всех n. Тогда из теоремы 1 следует сходимость ряда (1).

Пусть ряд (1) расходится. Докажем расходимость ряда (2) методом от противного. Предположим, что ряд (2) сходится. Тогда из рассуждений, проведённых выше, заключаем, что ряд (1) сходится. Пришли к противоречию. Тогда наше предположение неверно и ряд (2) расходится.

Примеры

1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ \ldots .$$

Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ \ldots ,$$

который, как было показано в § 1, сходится. Очевидно, что

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}, n = 2, 3, \ldots .$$

Тогда по доказанной теореме исходный ряд сходится.

2. Исследовать на сходимость ряд

$$\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}} + \ \ldots \ .$$

Сравним этот ряд с рядом

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ \ldots ,$$

который расходится. Так как $\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, то данный ряд расходится.

Из доказанной теоремы вытекает предельный признак сравнения рядов, удобный на практике.

Предварительно введём простое понятие.

Ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ \ldots$ будем называть строго положительным, если $a_n > 0$ для всех n.

Теорема 3. Пусть даны строго положительные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{5}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$, где $0 < l < +\infty$. Тогда ряды (4) и (5) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Пусть ε – число, такое, что $0 < \varepsilon < l$. В силу определения предела

$$\exists N = N(\varepsilon)\forall n \left(n > N \Rightarrow l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon\right).$$

Тогда

$$(l - \varepsilon)b_n < a_n < (l + \varepsilon)b_n \tag{6}$$

при $n > N$.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то в силу теоремы об умножении ряда на число сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(l+\varepsilon)b_n$. Но тогда по теореме об эквивалентности сходимости ряда и его остатка сходится ряд $\sum_{n=N+1}^{\infty}(l+\varepsilon)b_n$. Из неравенств (6) и теоремы 2 следует сходимость ряда $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$, следовательно, и ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Аналогично, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то из неравенств (6) и теоремы 2 сходится ряд $\sum_{n=N+1}^{\infty}(l-\varepsilon)b_n$. Умножив последний ряд на $\frac{1}{l-\varepsilon}$, получаем сходящийся ряд $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$. Тогда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Примеры

1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sin 1+\sin\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\sin\frac{1}{\sqrt{n}}+\ \ldots .$$

Сравним ряд с расходящимся рядом $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ \ldots$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$, то данный ряд расходится.

Заметим, что в этом примере непосредственно теорему 2 применить нельзя, так как $\sin\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{2^n}$.

Сравним ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=1$, то данный ряд сходится.

Замечание. Если в условиях теоремы $l=0$, то можно утверждать, что из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда (4). Действительно, если $\frac{a_n}{b_n}\to 0$ при $n\to\infty$, то, начиная с некоторого номера, $\frac{a_n}{b_n}<1$, следовательно $a_n<b_n$. Далее работает теорема 2.

Если же в условиях теоремы $l=+\infty$, то из расходимости ряда (4) следует расходимость ряда (5). Действительно, если $\frac{a_n}{b_n}\to+\infty$ при $n\to\infty$, то с некоторого номера $\frac{a_n}{b_n}>1$, или $a_n>b_n$. Далее вновь применяем теорему 2.

§ 4. Признак Даламбера сходимости строго положительного ряда

Теорема 1. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – строго положительный ряд. Если найдётся число $q\in(0;1)$, такое, что начиная с некоторого номера будет выполняться неравенство $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, то ряд сходится, если же с некоторого номера $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Пусть $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ при $n > N$. Тогда

$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q, \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < q, \dots, \frac{a_{N+k+1}}{a_{N+k}} < q, \dots .$$

Перемножая эти неравенства, получим: $\frac{a_{N+k+1}}{a_{N+1}} < q^k$, $k = 1, 2, \dots$, откуда

$$a_{N+k+1} < q^k a_{N+1}. \qquad (1)$$

Рассмотрим ряды

$$a_{N+2} + a_{N+3} + a_{N+4} + \dots, \qquad (2)$$

$$a_{N+1}q + a_{N+1}q^2 + a_{N+1}q^3 + \dots . \qquad (3)$$

Ряд (3) сходится как ряд-сумма геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. Тогда из неравенств (1) в силу признака сравнения следует, что ряд (2) также сходится. Но ряд (2) есть ряд-остаток исходного ряда. Таким образом, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть теперь $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ при $n > N$. Отсюда $a_{n+1} \geq a_n > 0$ при $n > N$. Члены ряда не убывают, а следовательно, общий член ряда не стремится к нулю, и ряд расходится.

На практике чаще удобнее применять предельный признак Даламбера.

Теорема 2. Пусть дан строго положительный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, и пусть существует конечный или бесконечный предел $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Если $D < 1$, то ряд сходится, если же $D > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. 1. Пусть $D < 1$. Выберем произвольное число q такое, что $D < q < 1$. Тогда найдется N такое, что при $n > N$ величина $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ и, следовательно, ряд сходится по теореме 1.

2. Пусть $D > 1$. Тогда $\exists N \forall n \left(n > N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\right)$ и по теореме 1 ряд расходится.

Замечание. В теореме 2 ничего не говорится о случае $D = 1$. В этом случае ряд может сходиться, может и расходиться. Рассмотрим ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Легко показать, что для этих рядов $D = 1$. Первый ряд расходится, а второй сходится.

Примеры

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Так как $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$, то ряд сходится.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$. Так как $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=+\infty>1$, то ряд расходится.

§ 5. Верхний и нижний пределы последовательности действительных чисел

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность действительных чисел.

Определение 1. Число a называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если в любой окрестности a находится бесконечно много членов $\{x_n\}$.

Из определения вытекает, что если a – предельная точка для $\{x_n\}$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$. Очевидно, верно и обратное: если $\{x_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, то $a=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$ – предельная точка для $\{x_n\}$.

Теорема 1. Ограниченная последовательность действительных чисел имеет самую правую и самую левую предельные точки.

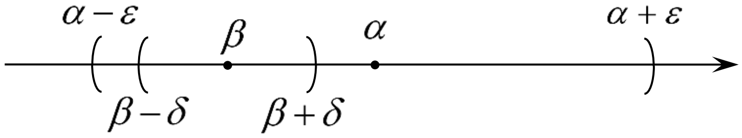
Доказательство. Если $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность действительных чисел, то по известной теореме Больцано – Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Тогда $a=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$ – предельная точка последовательности $\{x_n\}$. Таким образом, $\{x_n\}$ имеет хотя бы одну предельную точку.

Пусть E – множество всех предельных точек для $\{x_n\}$. Множество E не является пустым. Ясно, что E – ограниченное множество, поскольку в противном случае последовательность $\{x_n\}$ была бы неограниченной. Пусть $\alpha=\sup E$. Такое число существует по теореме о существовании верхней грани ограниченного числового множества действительных чисел. Если мы покажем, что $\alpha\in E$, то α и будет самой правой предельной точкой для $\{x_n\}$.

Зададимся произвольным $\varepsilon>0$. По свойству верхней грани

$$\exists\beta\in E(\alpha-\varepsilon<\beta\le\alpha).$$

Так как β – предельная точка для $\{x_n\}$, то при любом $0<\delta<\beta-(\alpha-\varepsilon)$ в окрестности $(\beta-\delta;\beta+\delta)$ будет бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.



Тогда и в ε-окрестности точки α будет бесконечно много членов $\{x_n\}$, значит α является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, то есть $\alpha \in E$.

Аналогично доказывается существование самой левой точки для множества E.

Замечание. Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху или снизу, то множество E предельных точек $\{x_n\}$ может оказаться пустым, что видно из следующих примеров: 1) $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; 2) $\{-n\} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

Однако, как следует из доказательства теоремы, если множество E не является пустым, а последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), то существует самая правая (левая) точка E.

Определение 2. Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и E – множество всех её предельных точек.

1. Если множество $E \neq \emptyset$ и последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), то верхним (нижним) пределом $\{x_n\}$ называется самая правая (левая) предельная точка $\{x_n\}$.

Обозначения: $\max E = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\min E = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

2. Если последовательность не ограничена сверху (снизу), то полагают $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$ ($\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$).

3. Если множество E пустое, а последовательность ограничена сверху (снизу), то полагают $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$ ($\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$).

Примеры

1. $\{1,0,1,0,1,\ldots\}$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$.

2. $\{1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$.

3. $\{1,2,3,\ldots\}$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$.

4. $\{-1,-2,-3,\ldots\}$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$.

Итак, из определения следует, что всякая последовательность действительных чисел имеет верхний и нижний пределы[2].

Рассмотрим некоторые свойства верхнего и нижнего пределов последовательности.

---

[2] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: учеб. для студентов университетов и вузов. В 3 т., Т. 1. – М.: Высш. шк., 1988. – С. 137.

1. Если $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Действительно, в этом случае $\{x_n\}$ имеет единственную предельную точку.

2. Если $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \alpha$, то найдётся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$.

Действительно, если α – конечное число, то существование подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ следует из определения 1.

Это верно и в том случае, когда $\alpha = +\infty$ или $\alpha = -\infty$. Действительно, пусть, например, $\alpha = +\infty$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху и, следовательно, можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$ (докажите это самостоятельно).

Аналогичное свойство верно, очевидно, и для нижнего предела.

3. Если $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \alpha$, где α – действительное число, то

$$\forall \beta > \alpha\ \exists N = N(\beta)\ \forall n\ (n > N \Rightarrow x_n < \beta).$$

Таким образом, левее всякого числа β, большего верхнего предела α, находятся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Доказательство. Докажем утверждение методом от противного. Допустим, что существует $\beta_0 > \alpha$, такое, что правее β_0 находится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.

Множество таких членов последовательности ограничено сверху, так как $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \alpha$ – конечно число. Но тогда нашлась бы предельная точка $\gamma \geq \beta_0 > \alpha$, чего быть не может.

Аналогичное свойство можно сформулировать и для нижнего конечного предела.

4. Нам известно, что предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению пределов этих последовательностей[3].

На верхние или нижние пределы это предложение не распространяется. Покажем это на примере.

Пусть $\{x_n\} = \{0, 1, 0, 1, \dots\}$, $\{y_n\} = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$, тогда $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n = 1$. Заметим, что $\{x_n y_n\} = \{0, 0, 0, \dots\}$, тогда $\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = 0$. Видим, что $\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \neq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$.

---

[3] Голубев А.А., Суетин В.Ю. Введение в анализ. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2007. – С. 48.

Рассмотрим случай, когда аналогия имеет место.

Теорема 2. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – последовательности неотрицательных чисел, причём $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $0 < a < +\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n = b$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n = ab$$

(если $b = +\infty$, то $ab = +\infty$).

Доказательство. 1. Пусть $b < +\infty$. Точка ab является предельной для последовательности $\{x_n y_n\}$. Действительно, если $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$, то найдётся $\{y_{n_k}\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n_k} = b$. Так как $x_n \to a$, то $x_{n_k} \to a$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\left(x_{n_k} y_{n_k}\right) = ab.$$

Покажем, что ab – самая правая предельная точка для $\{x_n y_n\}$, то есть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n y_n) = ab$.

Предположим, что ab не есть самая правая предельная точка. Тогда найдётся предельная точка $c > ab$. По свойству 2 можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_l} y_{n_l}\}$ такую, что $\lim\limits_{l\to\infty}\left(x_{n_l} y_{n_l}\right) = c$, причём $\lim\limits_{l\to\infty} x_{n_l} = a \neq 0$. Тогда

$$\lim_{l\to\infty} y_{n_l} = \lim_{l\to\infty} \frac{x_{n_l} \cdot y_{n_l}}{x_{n_l}} = \frac{\lim\limits_{l\to\infty}\left(x_{n_l} y_{n_l}\right)}{\lim\limits_{l\to\infty} x_{n_l}} = \frac{c}{a}.$$

Заметим, что $\frac{c}{a} \leq b$, так как $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n = b$. Тогда $c \leq ab$, что противоречит выбору точки c.

2. Пусть $b = +\infty$. Тогда можно выделить $\{y_{n_k}\}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = +\infty$. Ясно, что в этом случае $\lim\limits_{k\to\infty}\left(x_{n_k} y_{n_k}\right) = +\infty$, так как $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a > 0$. Следовательно, и в этом случае утверждение верно.

§ 6. Признаки Коши – Адамара и Коши сходимости положительных рядов

Теорема 1 (Коши – Адамар). Пусть дан положительный ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ \ldots \tag{1}$$

и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = k$. Если $k < 1$, то ряд сходится, если же $k > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. 1. Пусть $k < 1$. Рассмотрим q такое, что $k < q < 1$. Ясно, что $q > 0$. Тогда по свойству 3 верхнего предела

$$\exists N \forall n \big(n > N \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q\big).$$

Следовательно,

$$a_n < q^n \text{ при } n > N. \tag{2}$$

Рассмотрим ряды

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ \ldots$$

и

$$q^{N+1} + q^{N+2} + q^{N+3} + \ \ldots\ .$$

Второй ряд сходится как ряд-сумма геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. Из неравенств (2) по признаку сравнения положительных рядов сходится первый ряд, являющийся рядом-остатком ряда (1).

2. Пусть $k > 1$. Тогда можно утверждать, что существует подпоследовательность $\sqrt[n_l]{a_{n_l}}$ такая, что $\lim\limits_{l\to\infty} \sqrt[n_l]{a_{n_l}} = k$. Тогда

$$\sqrt[n_l]{a_{n_l}} \geq 1, \text{ или } a_{n_l} \geq 1.$$

Но это означает, что общий член ряда (1) не стремится к нулю, ряд расходится.

Замечание. В теореме ничего не говорится о случае, когда $k = 1$. При $k = 1$ ряд (1) может как сходиться, так и расходиться. Покажем это на примерах.

Примеры

1. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ \ldots\ .$

2. $1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ \ldots\ .$

Легко проверить, что для этих рядов $k = 1$. При этом первый ряд расходится, а второй – сходится.

Пример

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5^3} + \left(\frac{3}{5}\right)^4 + \ \ldots\ .$$

Тогда

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\dfrac{1}{5^n}} = \dfrac{1}{5}, & \text{если } n \text{ нечётное,} \\ \sqrt[n]{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n} = \dfrac{3}{5}, & \text{если } n \text{ чётное,} \end{cases}$$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{5} < 1$, ряд сходится.

Существуют более простые признаки типа признака Коши – Адамара. Доказательство следующего признака аналогично доказательству признака Коши – Адамара.

Теорема 2. Пусть дан положительный ряд (1). Если, начиная с некоторого номера, $\sqrt[n]{a_n} < q < 1$, то ряд сходится. Если же, начиная с некоторого номера, $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.

Теорема 3 (Коши). Пусть дан положительный ряд (1) и пусть существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = k$. Если $k < 1$, то ряд сходится, если же $k > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Это утверждение является частным случаем теоремы Коши – Адамара, так как в этом случае $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = k$.

Следует помнить, что при $k = 1$ ряд может сходиться, может и расходиться.

Примеры

1. $\frac{1}{4} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n + \ \ldots$.

$k = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1$. Ряд сходится.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$. $\quad k = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}} = 3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 3 > 1$. Ряд расходится.

§ 7. Интегральный признак Коши сходимости положительных рядов

Теорема 1. Пусть общий член положительного ряда

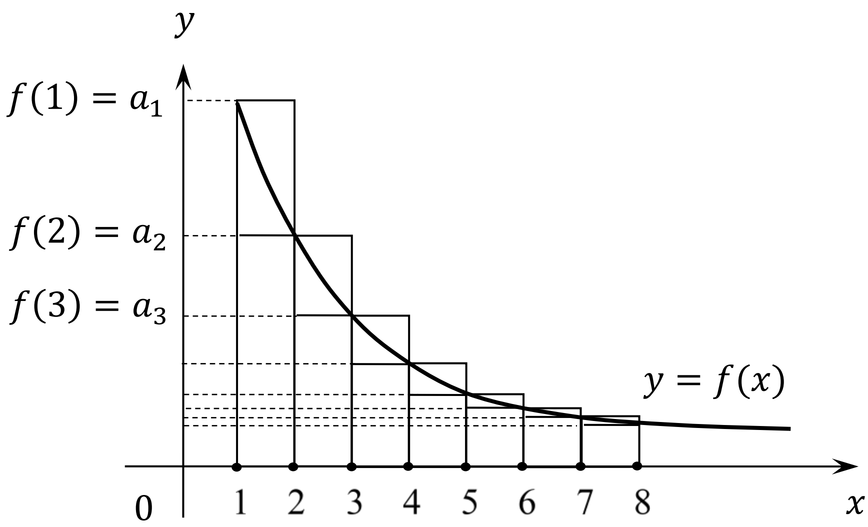
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ \ldots \qquad (1)$$

выражается формулой $a_n = f(n)$, где функция $f(x)$ положительная, непрерывная и невозрастающая на промежутке $[1; +\infty)$. Тогда ряд (1) сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{+\infty} f(x)dx$[4].

Доказательство. Выполним чертёж, поясняющий доказательство.

---

[4] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: учеб. для студентов университетов и вузов. В 3 т., Т. 1. – М.: Высш. шк., 1988. – С. 659–667.



Сравнивая площади криволинейных трапеций и прямоугольников, соответствующих отрезкам $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, …, получаем

$$a_2 \le \int_1^2 f(x)dx \le a_1,$$

$$a_3 \le \int_2^3 f(x)dx \le a_2,$$

$$\ldots,$$

$$a_n \le \int_{n-1}^n f(x)dx \le a_{n-1},$$

$$\ldots .$$

Сложим первые $n-1$ неравенства. Получим

$$S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)dx \le S_{n-1}, \quad (2)$$

где S_n – частная сумма ряда (1).

Пусть интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится. В силу неубывания f для всех n имеем $S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)dx \le \int_1^{+\infty} f(x)dx$, отсюда для всех n $S_n \le \int_1^{+\infty} f(x)dx + a_1$. Последовательность частных сумм положительного ряда ограничена сверху, следовательно ряд сходится.

Пусть интеграл расходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = +\infty$ и из неравенств (2) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то есть ряд расходится.

Пример

Исследовать на сходимость ряд Дирихле

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ \ldots .$$

Если $\alpha \leq 0$, то ряд расходится, так как в этом случае общий член не стремится к нулю.

Пусть $0 < \alpha < +\infty$. В этом случае рассмотрим несобственный интеграл вида $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ монотонно убывает на $[1, +\infty)$. Нам известно, что при $\alpha > 1$ интеграл сходится, а при $\alpha \leq 1$ расходится.

Итак, гармонический ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Так, например, ряд $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ расходится, а ряд $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \ldots$ сходится.

§ 8. Знакочередующиеся ряды

Определение. Действительный ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots , \quad (1)$$

где $a_n > 0$ для всех n, называется знакочередующимся.

Пример. Ряд Лейбница $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots$.

Замечание. Из определения следует, что знакочередующийся ряд – это такой ряд, в котором последовательные члены имеют противоположные знаки. При этом числовой ряд, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется знакопеременным. Тогда знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Для знакочередующихся рядов Лейбниц установил следующий признак сходимости.

Теорема (признак Лейбница). Если члены ряда (1) монотонно убывают по абсолютной величине и общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится.

Доказательство. Итак, дано, что

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots, \ \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Рассмотрим частные суммы ряда (1) с чётными номерами.

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k}).$$

В силу условий теоремы все разности в скобках положительны. Тогда последовательность частных сумм с чётными номерами является положительной и возрастающей.

С другой стороны, частную сумму с чётным номером можно записать следующим образом:

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}.$$

Отсюда видно, что для всех k

$$0 < S_{2k} < a_1. \tag{2}$$

Таким образом, $\{S_{2k}\}$ возрастающая и ограниченная последовательность. Тогда по теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности существует

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S.$$

Покажем, что последовательность частных сумм с нечётными номерами также имеет предел, равный S. Тогда теорема, очевидно, будет доказана. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}(S_{2k} + a_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = S + 0 = S.$$

Замечание 1. Все условия теоремы существенны. Относительно стремления к нулю общего члена это ясно (необходимое условие сходимости ряда). Покажем, что условие монотонного убывания членов ряда по абсолютной величине является существенным. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots .$$

Это знакочередующийся ряд, общий член ряда стремится к нулю с возрастанием номера. При этом члены ряда не убывают с возрастанием номера по абсолютной величине, что видно из неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}-1},$$

которое легко проверить.

Далее,

$$S_{2n-2} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1}\right) = \sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k-1} = 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \to +\infty \text{ при } k \to \infty.$$

Следовательно, ряд расходится.

Замечание 2. Перейдём в неравенстве (2) к пределу при $k \to \infty$:

$$0 < S \leq a_1. \tag{3}$$

Итак, для суммы сходящегося ряда (1) верна оценка (3). Рассмотрим разность

$$S - S_n = (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + (-1)^{n+2}a_{n+1} + \ldots) -$$
$$-(a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n) = (-1)^{n+2}a_{n+1} + (-1)^{n+3}a_{n+2} + \ldots =$$
$$= (-1)^{n+2}(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \ldots).$$

Для знакочередующегося ряда в скобках верна оценка (3). Тогда получаем

$$|S - S_n| \le a_{n+1}. \quad (4)$$

Таким образом, замена суммы ряда Лейбница его частной суммой даёт погрешность, которая не превосходит первого отброшенного члена ряда по абсолютной величине.

Пример

Рассмотрим ряды

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ \dots, \quad (5)$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} + \ \dots. \quad (6)$$

Ряды (5) и (6) сходятся по признаку Лейбница.

Сколько нужно взять членов ряда, чтобы подсчитать сумму ряда с точностью до 0,01?

а) $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100}$, если $n \ge 100$; б) $\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{100}$, если $n \ge 4$.

В этом случае говорят, что ряд (5) сходится медленнее, чем ряд (6).

§ 9. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение 1. Пусть дан произвольный ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots. \quad (1)$$

Образуем положительный ряд из модулей членов ряда (1)

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots. \quad (2)$$

Если ряд (2) сходится, то ряд (1) называется абсолютно сходящимся. Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется условно сходящимся. (Ясно, что всякий положительный сходящийся ряд является абсолютно сходящимся.)

Примеры

1. $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + \ \dots. \quad (3)$

Это абсолютно сходящийся ряд, так как сходится ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ \dots + \frac{1}{n^2} + \ \dots.$$

2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ \dots. \quad (4)$

Этот ряд по признаку Лейбница сходится. Образуем ряд из абсолютных величин данного ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots+\frac{1}{n}+\ \dots.$$

Этот ряд расходящийся. Таким образом, исходный ряд сходится условно.

3) $(1+i)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{i}{2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{i}{3}\right)-\ \dots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{i}{n}\right)+\ \dots.$

Легко видеть, что ряд из реальных частей данного ряда есть ряд (3), а ряд из мнимых частей ряда есть ряд (4). Вспоминая положение о соотношении между сходимостью ряда с комплексными числами и сходимостью рядов из реальных и мнимых частей, видим, что данный ряд сходится.

Образуем ряд из модулей данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}. \tag{5}$$

Видим, что $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}>\frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится. Тогда по признаку сравнения расходится ряд (5). Тогда исходный ряд сходится условно.

Будет ли абсолютно сходящийся ряд сходящимся?

Теорема 1. Абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Доказательство. Пусть дан абсолютно сходящийся ряд (1). В силу условия теоремы сходится ряд (2). Тогда для него выполняется критерий Коши сходимости

$$\forall\varepsilon>0\exists N\forall n\forall p\left((n>N)\wedge(p\geq 1)\Rightarrow|z_{n+1}|+|z_{n+2}|+\ \dots+|z_{n+p}|<\varepsilon\right). \tag{6}$$

Учитывая, что

$$|z_{n+1}+z_{n+2}+\ \dots+z_{n+p}|\leq|z_{n+1}|+|z_{n+2}|+\ \dots+|z_{n+p}|$$

при любых n и p, из (6) получаем

$$\forall\varepsilon>0\exists N\forall n\forall p\left((n>N)\wedge(p\geq 1)\Rightarrow|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+p}|<\varepsilon\right).$$

Это означает, что для ряда (1) выполнен критерий Коши, следовательно ряд сходится.

Для исследования рядов на абсолютную сходимость применяются признаки сходимости положительных рядов, так как в этом случае приходится рассматривать положительный ряд (2). Сформулируем их применительно к нашему случаю.

Теорема 2 (признак сравнения). Пусть дан ряд (1) и положительный сходящийся ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots . \tag{7}$$

Если для всех n $|z_n| \leq a_n$, то ряд (1) сходится абсолютно.

Доказательство. Дело сводится к признаку сравнения положительных рядов применительно к рядам (2) и (7).

Аналогично можно перефразировать предельный признак сравнения рядов.

Теорема 3 (Даламбер). Если для ряда (1) существует конечный или бесконечный предел

$$D^* = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|,$$

то при $D^* < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $D^* > 1$ ряд расходится.

Доказательство. 1) Если $D^* < 1$, то по признаку Даламбера ряд (2) сходится, что означает абсолютную сходимость ряда (1).

2) Если $D^* > 1$, то, как это следует из доказательства признака Даламбера, общий член ряда (2) не стремится к нулю. Но тогда не выполняется необходимый признак сходимости и для ряда (1). Ряд (1) расходится.

Замечание. Можно перефразировать признак Даламбера и в непредельной форме.

Теорема 4 (Коши – Адамар). Пусть дан ряд (1) и

$$k^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|}.$$

При $k^* < 1$ ряд сходится абсолютно, при $k^* > 1$ ряд расходится.

Доказательство теоремы дословно такое же, как и теоремы 3.

Если предполагать для ряда (1) существование предела $k^* = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$, то теорема 4 превращается в признак Коши.

Примеры

1. $\frac{\sin\alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots, \alpha = \mathrm{const} \in \mathbf{R}$.

Рассмотрим положительный сходящийся ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots .$$

Так как для всех α справедливо неравенство $\left|\frac{sin\, n\alpha}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, то данный ряд сходится абсолютно для любого $\alpha \in \mathbf{R}$.

2. $\frac{i}{2}+2\left(\frac{i}{2}\right)^2+3\left(\frac{i}{2}\right)^3+\ \dots+n\left(\frac{i}{2}\right)^n+\ \dots$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{1}{2}<1$, то ряд сходится абсолютно.

§ 10. Признаки Абеля и Дирихле сходимости действительных рядов

1. Преобразование Абеля

Рассмотрим две конечные последовательности действительных чисел $a_1, a_2, \ \dots\ , a_n$; $b_1, b_2, \ \dots\ , b_n$. Образуем конечную сумму

$$S=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

Пусть
$$\begin{aligned}
&B_1=b_1,\\
&B_2=b_1+b_2,\\
&\ldots,\\
&B_k=b_1+b_2+\ldots+b_k,\\
&\ldots,\\
&B_n=b_1+b_2+\ldots+b_n.
\end{aligned}$$

Тогда
$$\begin{aligned}
&b_1=B_1,\\
&b_2=B_2-B_1,\\
&\ldots,\\
&b_k=B_k-B_{k-1},\\
&\ldots,\\
&b_n=B_n-B_{n-1}.
\end{aligned}$$

Кроме того,
$$\begin{gathered}
S=a_1B_1+a_2(B_2-B_1)+a_3(B_3-B_2)+\ldots+\\
+a_k(B_k-B_{k-1})+\ldots+a_n(B_n-B_{n-1})=\\
=B_1(a_1-a_2)+B_2(a_2-a_3)+\ldots+\\
+B_k(a_k-a_{k+1})+\ldots+B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+B_na_n=\\
=\sum_{k=1}^{n-1}B_k(a_k-a_{k+1})+B_na_n=\sum_{k=1}^{n-1}\Delta a_kB_k+a_nB_n,
\end{gathered}$$

где $\Delta a_k=a_k-a_{k+1}$, $k=1,2,\ \ldots,n-1$, – так называемые первые разности.

Получили равенство

$$S=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}\Delta a_kB_k+a_nB_n,$$

которое обычно называют преобразованием Абеля.

2. Неравенство Абеля

Рассмотрим сумму $S = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. Будем предполагать, что конечная последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ является монотонной. Пусть $\left|\sum_{i=1}^{k} b_i\right| \le B$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда верно неравенство

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \le B(|a_1| + 2|a_n|).$$

Доказательство. Применим к сумме преобразование Абеля:

$$|S| = |\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k B_k + a_n B_n\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta a_k||B_k| + |a_n||B_n| \le B(\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta a_k| + |a_n|).$$

Учитывая, что конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ является монотонной (значит, все первые разности Δa_k имеют один и тот же знак), продолжим оценку:

$$|S| \le B\left(\left|\sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k\right| + |a_n|\right) = B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \le B(|a_1| + 2|a_n|).$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 1 (Абель). Если последовательность действительных чисел $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а действительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ также сходится.

Доказательство. Так $\{a_n\}$ ограничена, то

$$\exists M > 0 \forall n (|a_n| \le M).$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то согласно критерию Коши

$$\exists N \forall n \forall p \left((n > N) \wedge (p \ge 1) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{p} b_{n+k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M} \right).$$

Применяя неравенство Абеля (4) и последнюю оценку, получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\, b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k}\, b_{n+k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M} \left(\left|a_{n+1}\right| + 2\left|a_{n+p}\right| \right) \le \frac{\varepsilon}{3M} \cdot 3M = \varepsilon$$

при $n > N$ и $p \ge 1$. Видим, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполнен критерий Коши, ряд сходится.

Теорема 2 (Дирихле). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ такой, что последовательность действительных чисел $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность действительных чисел $\{B_n\} = \{\sum_{k=1}^{n} b_k\}$ ограничена. Тогда данный ряд сходится.

Доказательство. Пусть $|B_n| \le B$ для любого натурального n. Тогда для любого $n \ge 1$ и любого $p \ge 1$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k\right| = \left|B_{n+p} - B_{n-1}\right| \leq 2B. \tag{5}$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Так как $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\exists N \forall n \left(n > N \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}\right). \tag{6}$$

Применяя неравенство Абеля, неравенства (5) и (6), получим

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| \leq 2B\left(|a_n| + 2\left|a_{n+p}\right|\right) < 2B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon$$

при $n > N$ и $p \geq 1$. Видим, что для данного ряда выполнен критерий Коши, значит, ряд сходится.

Примеры

1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\ln n}$. Заметим, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$ сходится по признаку Лейбница, а последовательность $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$ возрастает и ограниченная. По признаку Абеля исходный ряд сходится.

2. В качестве примера на признак Дирихле докажем признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.

Итак, дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$, где $\{a_n\}$ – положительная, монотонно убывающая и стремящаяся к нулю последовательность. Нужно показать, что ряд сходится.

Положим здесь $b_n = (-1)^{n+1}$. Тогда

$$B_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} = \begin{cases} 1, \text{если } n \text{ нечётное,} \\ 0, \text{если } n \text{ чётное.} \end{cases}$$

Видим, что $\{B_n\}$ – ограниченная последовательность. Выполнены все условия теоремы Дирихле, ряд сходится.

§ 11. Свойства сходящихся рядов

1. Сочетательное свойство

Теорема 1. Пусть дан сходящийся ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots . \tag{1}$$

Образуем новый ряд, объединяя в группы члены ряда (1), при этом не меняя порядка их следования:

$$\left(z_1 + z_2 + \cdots + z_{n_1}\right) + \left(z_{n_1+1} + z_{n_1+2} + \ldots + z_{n_2}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(z_{n_k+1} + z_{n_k+2} + \ldots + z_{n_{k+1}}\right) + \ldots . \tag{2}$$

Ряд (2) сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (1).

Доказательство. Последовательность частных сумм ряда (2) является подпоследовательностью последовательности частных сумм ряда (1). Но всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же числу, что и последовательность.

Замечание. Мы видим, что в сходящемся ряде можно произвольно расставить скобки. Но эта аналогия с конечными суммами может нарушиться, если рассматривать сочетательное свойство в обратном порядке. Рассмотрим простой пример.

Ряд $(1-1)+(1-1)+\ \dots\ +(1-1)+\ \dots$, очевидно, сходится к сумме равной нулю. Но ряд $1-1+1-1+\ \dots$ расходится.

Однако, как это следует из теоремы, если из ряда (2) получается путём опускания скобок сходящийся ряд (1), то он имеет ту же сумму, что и ряд (2).

2. Переместительное свойство

Можно ли в сходящемся ряде произвольно переставлять члены ряда? Этого делать нельзя. Рассмотрим пример такого ряда.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots\ +\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\ \dots\,. \tag{3}$$

Ряд (3) является знакочередующимся и удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница, следовательно, сходится.

Замечание. Сумма ряда, как будет показано далее, равна $S=\ln 2$ (см. глава IV, § 3). Кроме того, доказать, что $S=\ln 2$, можно следующим образом. Воспользуемся равенством, которое обычно получают при рассмотрении теории последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots\ +\frac{1}{n}-\ln n\right)=c,$$

где $c\approx 0{,}57$ – постоянная Эйлера.

Ряд (3) сходится и его сумма равна S, тогда $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}$, и для частных сумм S_{2k} имеем

$$S_{2k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots\ +\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots+\frac{1}{2k}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ \dots\ +\frac{1}{2k}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots+\frac{1}{2k}-\ln 2k\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ \dots\ +\frac{1}{k}-\ln k\right)+\ln 2k-\ln k=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots+\frac{1}{2k}-\ln 2k\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ \dots\ +\frac{1}{k}-\ln k\right)+\ln 2.$$

Тогда $S=\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}=c-c+\ln 2=\ln 2.$

Переместим члены ряда (3) так, чтобы после одного положительного шли два отрицательных:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ \dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\ \dots. \tag{4}$$

Покажем, что сумма ряда (4) вдвое меньше суммы ряда (3). Пусть S_n и S_n' – частные суммы рядов (3) и (4) соответственно. Тогда

$$S_{3m}'=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2m}.$$

Таким образом, $S_{3m}'\to\frac{1}{2}\ln 2$ при $m\to\infty$.

Остаётся показать, что последовательности $\{S_{3m-1}'\}$, $\{S_{3m-2}'\}$ имеют тот же предел. Это следует из равенств

$$S_{3m-1}'=S_{3m}'+\frac{1}{4m},\quad S_{3m-2}'=S_{3m-1}'+\frac{1}{4m-2}.$$

Более того верна следующая теорема.

Теорема (Риман). Если дан действительный условно сходящийся ряд, то, каково бы ни было число, можно так переставить члены ряда, что вновь полученный ряд будет сходиться к этому числу. Также можно так переставить члены данного ряда, что вновь полученный ряд будет расходящимся[5].

Выделим теперь класс рядов, для которых переместительное свойство верно.

Теорема 2. Пусть дан произвольный абсолютно сходящийся ряд

$$z_1+z_2+\ \dots+z_n+\ \dots \tag{5}$$

с комплексными членами. Произвольная перестановка членов ряда не нарушает его абсолютной сходимости и не изменяет суммы.

Доказательство разобьём на несколько этапов

1. Докажем сначала теорему для положительного ряда

$$a_1+a_2+\ \dots+a_n+\ \dots. \tag{6}$$

Пусть A_n – частная сумма и A – сумма ряда (6). Переставим произвольно члены ряда (6), получим ряд

$$b_1+b_2+\ \dots+b_n+\ \dots. \tag{7}$$

[5] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: учеб. для студентов физ.-мат. и инженерно-физических специальностей вузов. В 3 т., Т. 2. – М.: Высш. шк., 1988. – С. 45–47.

Частные суммы ряда (7) обозначим через B_n. Рассмотрим произвольную частную сумму B_n.

Далее, если взять частную сумму ряда (6) с достаточно большим номером m_n, то будут верны неравенства:

$$B_n \leq A_{m_n}, \quad m_n \geq n.$$

Перейдём в первом неравенстве к пределу при $m_n \to \infty$. Получим, что для всех n

$$B_n \leq A.$$

Видим, что частные суммы положительного ряда (7) ограничены сверху, поэтому ряд сходится. Пусть B – его сумма. Перейдём в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$B \leq A. \tag{8}$$

Мы рассматривали ряд (7) как полученный из ряда (6) перестановкой членов ряда. Если же в рассуждениях поменять ролями ряды (6) и (7), то получим, что

$$A \leq B. \tag{9}$$

Из неравенств (8) и (9) следует равенство $A = B$.

2. Докажем теперь теорему для произвольного абсолютно сходящегося ряда с действительными членами

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots . \tag{10}$$

Составим ряд из всех положительных членов ряда (10):

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots \tag{11}$$

и ряд из абсолютных величин всех отрицательных членов ряда (10):

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_m + \ldots . \tag{12}$$

(Если (11) или (12) – не ряды, а конечные суммы, то доказательство пункта 2 очевидным образом следует из доказанного пункта 1. Докажите это самостоятельно.)

В рядах (11) и (12) члены их располагаются в том порядке, в каком они следовали в ряде (10). Покажем, что ряды (11) и (12) сходятся, причём, если A, P и Q суммы рядов (10), (11) и (12) соответственно, то верно равенство

$$A = P - Q. \tag{13}$$

Пусть M_n – n-я частная сумма, а M– сумма положительного ряда

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots . \tag{14}$$

Обозначим через A_n, P_k и Q_m частные суммы рядов (10), (11) и (12) соответственно, причём n выберем произвольно, а k и m так, чтобы выполнялось равенство $A_n = P_k - Q_m$. Тогда ясно, что $n = m + k$ и что $m \to \infty$ и $k \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда легко видеть, что

$$P_k \le M_n \le M,\ Q_m \le M_n \le M.$$

Частные суммы положительных рядов (11) и (12) ограничены сверху, значит, ряды сходятся. Далее, переходя в равенстве $A_n = P_k - P_k - Q_m$ к пределу при $n \to \infty$, получим равенство (13).

Таким образом, на абсолютно сходящийся ряд с действительными числами можно смотреть как на разность двух положительных рядов.

Теперь закончим доказательство этого пункта.

Перестановка членов ряда (10) ведёт к перестановке членов положительного ряда (14). Как следует из первого пункта теоремы, сходимость его не нарушается. Это значит, что ряд (10) и после перестановки сохраняет абсолютную сходимость.

Далее, эта же перестановка приводит к некоторой перестановке в положительных рядах (11) и (12), которая по первому пункту теоремы не нарушает сходимости рядов и их сумм. Но тогда и после перестановки сохраняется равенство

$$A = P - Q.$$

3. Теперь докажем теорему в общем случае.

Итак, дан абсолютно сходящийся ряд с комплексными членами

$$S = z_1 + z_2 + \ \dots + z_n + \ \dots . \tag{5}$$

Пусть $z_n = a_n + ib_n$. Рассмотрим действительные ряды

$$a_1 + a_2 + \ \dots + a_n + \ \dots , \tag{15}$$

$$b_1 + b_2 + \ \dots + b_n + \ \dots . \tag{16}$$

Как известно, ряды (15) и (16) сходятся, причём, если A и B соответственно их суммы, то верно равенство

$$S = A + Bi. \tag{17}$$

Но ряды (15) и (16) сходятся абсолютно, что следует из очевидных неравенств

$$|a_n| \le |z_n|, |b_n| \le |z_n|, n = 1, 2, \dots$$

и признака сравнения положительных рядов.

Произведём теперь перестановку членов ряда (5). Это приведёт к такой же перестановке в рядах (15) и (16), что по пункту 2 теоремы не нарушает их абсолютной сходимости и не изменяет их суммы. А тогда в результате перестановки сохраняются сходимость ряда (5) и равенство (17).

Сходимость будет абсолютная, так как $|z_n| \leq |a_n| + |b_n|$.

§ 12. Умножение рядов

Пусть даны два ряда с комплексными членами

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n + \ \dots, \tag{1}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \ \dots + \beta_n + \ \dots. \tag{2}$$

Рассмотрим всевозможные парные произведения членов этих рядов. Их можно расположить в виде матрицы:

$$\begin{matrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_1 & \alpha_3\beta_1 & \alpha_4\beta_1 & \cdots \\ \alpha_1\beta_2 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_3\beta_2 & \alpha_4\beta_2 & \cdots \\ \alpha_1\beta_3 & \alpha_2\beta_3 & \alpha_3\beta_3 & \alpha_4\beta_3 & \cdots \\ \alpha_1\beta_4 & \alpha_2\beta_4 & \alpha_3\beta_4 & \alpha_4\beta_4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \tag{3}$$

Все парные произведения можно многими способами расположить в виде последовательности, не пропустив ни одного. Например, их можно выписать по диагоналям матрицы:

$$\alpha_1\beta_1,\ \alpha_1\beta_2,\ \alpha_2\beta_1,\ \alpha_1\beta_3,\ \alpha_2\beta_2,\ \alpha_3\beta_1,\ \alpha_1\beta_4,\ \alpha_2\beta_3,\ \alpha_3\beta_2,\ \alpha_4\beta_1,\ \dots,$$

или по квадратам матрицы:

$$\alpha_1\beta_1,\ \alpha_1\beta_2,\ \alpha_2\beta_2,\ \alpha_2\beta_1,\ \alpha_1\beta_3,\ \alpha_2\beta_3,\ \alpha_3\beta_3,\ \alpha_3\beta_2,\ \alpha_3\beta_1,\ \dots.$$

Теорема. Если ряды (1) и (2) сходятся абсолютно, то ряд, составленный из всех парных произведений (3) и взятых в любом порядке, также сходится абсолютно, причём его сумма равна произведению сумм рядов (1) и (2).

Доказательство. Рассмотрим ряд из парных произведений, взятых в некотором произвольно выбранном порядке

$$\sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{i_s}\beta_{k_s} = \alpha_{i_1}\beta_{k_1} + \alpha_{i_2}\beta_{k_2} + \ \dots + \alpha_{i_s}\beta_{k_s} + \ \dots.$$

Для доказательства абсолютной сходимости этого ряда достаточно доказать абсолютную сходимость такого же ряда из парных произведений, взятых в каком-либо определённом порядке, так как перестановки не нарушают абсолютной сходимости ряда и его суммы.

По условию теоремы сходятся ряды

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ \dots + |\alpha_n| + \ \dots, \tag{4}$$

$$|\beta_1| + |\beta_2| + \ \dots + |\beta_n| + \ \dots. \tag{5}$$

Пусть их суммы равны A^* и B^*, частные суммы обозначим через A_n^* и B_n^*.

Рассмотрим ряд

$$|\alpha_1\beta_1| + (|\alpha_1\beta_2| + |\alpha_2\beta_2| + |\alpha_2\beta_1|) +$$

$$+(|\alpha_1\beta_3| + |\alpha_2\beta_3| + |\alpha_3\beta_3| + |\alpha_3\beta_2| + |\alpha_3\beta_1|) + \ \dots. \tag{6}$$

Члены этого ряда образованы группировкой членов ряда

$$|\alpha_1\beta_1| + |\alpha_1\beta_2| + |\alpha_2\beta_2| + |\alpha_2\beta_1| +$$

$$+|\alpha_1\beta_3| + |\alpha_2\beta_3| + |\alpha_3\beta_3| + |\alpha_3\beta_2| + |\alpha_3\beta_1| + \ \dots, \tag{7}$$

в котором парные произведения рядов (4) и (5) расположены в соответствии с квадратами матрицы (3). Группировка сделана также в соответствии с этими квадратами. Нам надо доказать сходимость ряда (7).

Заметим, что частные суммы ряда (6) имеют вид $A_1^* \cdot B_1^*$, $A_2^* \cdot B_2^*$, ... , $A_k^* \cdot B_k^*$, … . Но тогда ряд (6) сходится к $A^* \cdot B^*$, так как

$$A_k^* \cdot B_k^* \to A^* \cdot B^* \text{ при } k \to \infty.$$

Теперь опустим скобки в положительном ряде (6) и получим положительный ряд (7). Легко заметить, что любая частная сумма ряда (7) S_n^* находится между некоторыми частными суммами ряда (6) с соседними номерами:

$$A_{k_n}^* B_{k_n}^* \le S_n^* \le A_{k_n+1}^* B_{k_n+1}^*.$$

Отсюда видим, что $S_n^* \to A^* \cdot B^*$, то есть ряд (7) сходится к $A^* \cdot B^*$.

Повторяя буквально все рассуждения для рядов (1) и (2), проведённые для рядов (4) и (5), мы найдём, что ряд

$$\alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_1) + \ \dots$$

сходится к сумме $A \cdot B$, где A и B – суммы рядов (1) и (2). Теперь можно опустить скобки в этом ряде, так как получаем сходящийся ряд.

Определение. Пусть даны ряды (1) и (2). Рядом-произведением по Коши рядов (1) и (2) назовём ряд

$$\alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1) + \ \dots +$$

$$+(\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \ \dots + \alpha_n\beta_1) + \ \dots = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k+1}.$$

Члены этого ряда образованы из групп парных произведений матрицы (3), расположенных по её диагоналям.

Из доказанной теоремы вытекает, что если ряды (1) и (2) сходятся абсолютно, то ряд-произведение по Коши так же сходится абсолютно, причём сумма его будет произведением сумм рядов-сомножителей.

Замечание. Если ряды (1) и (2) являются условно сходящимися, то ряд-произведение по Коши этих рядов может расходиться.

Рассмотрим условно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \ \dots .$$

Умножим его на себя по правилу Коши. Так как $\alpha_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$, $\beta_{n-k+1} = \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}$, то $\alpha_k \beta_{n-k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}$, тогда получим

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \ \dots + \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} + \ \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} > \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$. Тогда выражение в скобках будет больше единицы. Общий член ряда не стремится к нулю, ряд-произведение расходится.

Однако можно доказать, что если один ряд сходится абсолютно, а второй просто сходится, то ряд-произведение сходится к сумме, равной произведению сумм рядов-сомножителей.

§ 13. О связи между действительными рядами и несобственными интегралами

Мы будем рассматривать несобственный интеграл вида $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, предполагая, как обычно, существование интеграла $F(A) = \int_a^A f(x)dx$ при любом $A > a$. Между интегралами такого вида и действительными рядами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует глубокая аналогия.

Если процесс суммирования по n заменить процессом интегрирования по x, то аналогами будут:

1) общий член ряда a_n и подынтегральная функция $f(x)$;
2) частная сумма ряда $\sum_{k=1}^{n} a_k$ и интеграл $F(A) = \int_a^A f(x)dx$;
3) сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, как предел $\sum_{k=1}^{n} a_k$ при $n \to \infty$, и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, как предел $\int_a^A f(x)dx$ при $A \to +\infty$;
4) остаток ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ и интеграл $\int_A^{+\infty} f(x)dx$.

При построении теории рядов и интегралов мы получили много аналогичных результатов, таких как признаки сравнения рядов и интегралов, признаки сходимости Абеля и Дирихле для обоих случаев, вводили в обоих случаях абсолютную и условную сходимость и т. д.

Более того, вопрос о сходимости интеграла можно свести к изучению числовых рядов. Действительно, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится к числу K, если

$$K = \lim_{A\to+\infty} F(A), \text{ где } F(A) = \int_a^A f(x)dx.$$

Вспоминая определение предела функции по Гейне, можем сказать, что для сходимости интеграла к числу K необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности чисел $\{A_n\}$ $(A_n > a)$ такой, что $A_n \to +\infty$, выполнялось

$$\lim_{n\to\infty} F(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^{A_m} f(x)dx = K.$$

С другой стороны, вопрос о пределе последовательности $\left\{\int_a^{A_n} f(x)dx\right\}$ тождественен вопросу о сумме ряда

$$\int_a^{A_1} f(x)dx + \left(\int_a^{A_2} f(x)dx - \int_a^{A_1} f(x)dx\right) +$$
$$+\left(\int_a^{A_3} f(x)dx - \int_a^{A_2} f(x)dx\right) + \ \dots + \left(\int_a^{A_n} f(x)dx - \int_a^{A_{n-1}} f(x)dx\right) + \ \dots =$$
$$= \int_a^{A_1} f(x)dx + \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx + \ \dots + \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx + \ \dots .$$

Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема. Для сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы, какова бы ни была последовательность $A_n \to +\infty$ $(A_0 = a;\ A_n > a,\ n = 1, 2, 3, \dots)$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx$$

сходился к одной и той же сумме, которая и является значением несобственного интеграла.

Заметим, что если $f(x)$ неотрицательная функция, то для существования интеграла достаточно сходимости указанного ряда при одном частном выборе возрастающей последовательности чисел A_n. Действительно, в этом случае возрастающая функция $F(A)$ будет ограничена суммой этого ряда, а тогда, как известно, существует $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$.

Заметим, что отмеченная аналогия между рядами и интегралами не является полной. Так, нам известно, что если ряд сходится, то $a_n \to 0$ при

$n \to \infty$. Если же интеграл сходится, то отсюда не следует, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Приведём пример. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx$. Ясно, что подынтегральная функция $\sin x^2$ при $x \to +\infty$ вообще не имеет предела, но интеграл сходится. Действительно, сделаем замену переменного, положив $x^2 = t$. Тогда $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ и

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt.$$

Последний интеграл, как показано в теории несобственных интегралов, сходится.

Задачи к главе I

1. Запишите формулу n-го члена ряда по указанным его первым членам и ряд, используя знак суммы:

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ \dots$;

2) $\frac{1}{11}+\frac{2}{101}+\frac{3}{1001}+\frac{4}{1001}+\ \dots$;

3) $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\ \dots$;

4) $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\ \dots$;

5) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\ \dots$;

6) $\frac{1}{9}+\frac{2}{19}+\frac{3}{29}+\ \dots$;

7) $\frac{3}{2}+\frac{8}{3}+\frac{15}{4}+\ \dots$;

8) $0{,}6+0{,}51+0{,}501+\ \dots$;

9) $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\ \dots$;

10) $\frac{3}{2}+\frac{9}{24}+\frac{27}{720}+\ \dots$.

Ответы:

1) $a_n=\frac{1}{n(n+1)},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$;

2) $a_n=\frac{n}{10^n+1},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{10^n+1}$;

3) $a_n=\frac{10^n}{2n+5},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{10^n}{2n+5}$;

4) $a_n=\begin{cases} n, & n=2k-1,\\ \frac{1}{n}, & n=2k, k\in\mathbf{Z}\end{cases},\ \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$;

5) $a_n=\frac{n}{n^2+1},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

6) $a_n=\frac{n}{10n-1},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{10n-1}$;

7) $a_n=\frac{n^2-1}{n},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-1}{n}$;

8) $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{10^n},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10^n}\right)$;

9) $a_n=\frac{2n}{3n+2},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{3n+2}$;

10) $a_n=\frac{3^n}{(2n)!},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$.

2. Пользуясь необходимым признаком сходимости ряда, докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}$ расходится.

Решение. Общий член ряда $a_n=\frac{n}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$, следовательно, ряд расходится.

3. Исследуйте на сходимость бесконечную геометрическую прогрессию с действительными членами, то есть действительный ряд вида $a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$, $a=\text{const}>0$.

Решение. Запишем n -ю частную суму ряда для $q\neq 1$:

$$S_n=a+aq+\ldots+aq^{n-1}=a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n = 0$, а потому $\lim\limits_{n\to\infty}S_n = \frac{a}{1-q}$. Значит, при $|q| < 1$ исследуемый ряд сходится и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$. Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n = +\infty$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}|S_n| = +\infty$, то есть ряд расходится.

Наконец, ряд расходится при $q = -1$, так как частичными суммами ряда $a - a + a - a + a - \ldots$ являются $S_{2n} = 0$, $S_{2n+1} = a$, а последовательность $a, 0, a, 0, \ldots$, где $a \neq 0$, не имеет предела.

Этот ряд расходится и при $q = 1$, так как в этом случае $S_n = a + a + a + \ldots + a = na$, а $\lim\limits_{n\to\infty}na = +\infty$.

Ответ: ряд сходится для $|q| < 1$ и расходится $|q| \geq 1$.

4. Докажите, что ряд $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$, где $0 < \alpha < 1$, расходится.

Решение. Для этого ряда $S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$. Так как все члены суммы S_n не меньше $\frac{1}{n^\alpha}$ и она состоит из n членов, то $S_n > n \cdot \frac{1}{n^\alpha} = n^{1-\alpha}$. Но при $0 < \alpha < 1$ имеем $1 - \alpha > 0$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n \geq \lim\limits_{n\to\infty}n^{1-\alpha} = +\infty$. Расходимость ряда доказана.

5. Найдите сумму ряда:

1) $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$;

2) $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots$.

Решение. 1. Пользуясь разложением $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, находим $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, то ряд сходится и его сумма равна 1.

2. *Первый способ*. Заметим, что

$S_1 = \frac{1}{1\cdot3} = \frac{1}{3}$, $S_2 = \frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} = \frac{2}{5}$, $S_3 = \frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} = \frac{3}{7}$,

$S_4 = \frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \frac{1}{7\cdot9} = \frac{4}{9}$.

Докажем, что $S_n = \frac{n}{2n+1}$. Воспользуемся методом математической индукции. Так как

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{2n^2+2n+n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1},$$

то наша гипотеза верна.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$, сумма данного ряда существует и равна $\frac{1}{2}$.

Второй способ. Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, представим общий член ряда в виде суммы двух дробей:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{A(2n+1)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2(A+B)n+(A-B)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, получим систему уравнений $\begin{cases} 2A+2B=0 \\ A-B=1 \end{cases}$, из которой находим: $A=\frac{1}{2}$ и $B=-\frac{1}{2}$.

Таким образом,

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right),$$

и частную сумму ряда можно записать так:

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right),$$

так как все слагаемые, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются.

Теперь находим сумму ряда: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$.

Ответы: 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$.

6. Найдите сумму ряда:

1) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ \ldots$;

2) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$;

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$;

5) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ \ldots$;

6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+6}{n(n+3)(n+2)}$;

7) $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$;

8) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$;

9) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$;

10) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3n-5}{(n^2-1)n}$;

11) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$;

12) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{5^{n+1}}$;

13) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$;

14) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$;

15) $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-4)n}$;

16) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}$;

17) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$;

18) $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$.

Ответы:

1) 1; 2) -4; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{8}{3}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{7}{6}$; 7) $\frac{17}{6}$; 8) 0,7; 9) $\frac{7}{36}$; 10) 1;

11) 2; 12) $\frac{2}{15}$; 13) $\frac{5}{4}$; 14) $\frac{33}{40}$; 15) $\frac{11}{96}$; 16) 1; 17) $\frac{1}{3}$; 18) $\frac{3}{2}$.

7. Используя признаки сравнения, выясните, сходится или расходится ряд:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n3^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n}$.

Решение. 1. Положительный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ сравним с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Так как $\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{n}$, $n=1,\ 2,\ 3,\dots$, то согласно признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n3^n}$ является положительным. Сравним его с рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, являющимся сходящейся геометрической прогрессией со знаменателем $q=\frac{2}{3}<1$. Так как $\frac{2^n}{n3^n}\leq\frac{2^n}{3^n}$, $n=1,\ 2,\ \dots$, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n3^n}$ сходится.

3. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n}$ является положительным. Применим признак сравнения в предельной форме. Для сравнения возьмём расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\left|\begin{matrix}\frac{1}{n}=t\\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1,$$

то данный ряд и гармонический ряд ведут себя одинаково, то есть данный ряд также расходится.

8. Используя признаки сравнения, исследуйте сходимость ряда:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-3n+4}$; 5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+1}{5^n+1}$; 6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$;

7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$; 8) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$; 9) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 5^n}$;

10) $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; 11) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$; 12) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{(n+2)n}$;

13) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n+1}$; 14) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot 6^n}$; 15) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n}}$;

16) $\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$; 17) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n(2^n+1)}$; 18) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$;

19) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}$; 20) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+1}{n^2(n+1)^2}$; 21) $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{n}{n^3+1}}$;

22) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$; 23) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$; 24) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$;

25) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^7-2n+3}}$; 26) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}\sin\frac{1}{n}$; 27) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^{n-1}}{(n-1)^n}$.

Ответы:

1) расходится; 2) сходится; 3) сходится;
4) сходится; 5) сходится; 6) расходится;
7) расходится; 8) сходится; 9) сходится;
10) сходится; 11) сходится; 12) расходится;
13) сходится; 14) сходится; 15) расходится;
16) расходится; 17) расходится; 18) сходится;
19) расходится; 20) сходится; 21) расходится;
22) расходится; 23) расходится; 24) сходится;
25) сходится; 26) сходится; 27) расходится.

9. Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{n!}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$.

Решение. 1. Так как $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, то $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$. Следовательно, ряд сходится.

2. Так как $a_n = \frac{n^n}{2^n n!}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$, то $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} : \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$.
Согласно признаку Даламбера ряд расходится.

10. Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Даламбера:

1) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n-3}{7^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{5^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{6^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{3^n(2n-1)}$; 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$;

7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n-4}{3^n}$; 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n}{n 3^n}$; 9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n!}}{3^n}$;

10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+2}{4^n}$; 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+2n+1}{2^{n+5}(n^2+5)}$; 12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(n^2+1)3^n}}{n 2^{\frac{n}{2}}}$;

13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$; 14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$; 15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$;

16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!}{n!}$; 17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{11}{10}\right)^{n-1} \frac{1}{n^5}$; 18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!}$;

19) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n n!}{n^n}$; 20) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; 21) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{4^n}$;

22) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{(2n)!}$; 23) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^n}$; 24) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n n!}{n^n}$.

Ответы:

1) сходится; 2) сходится; 3) расходится;
4) сходится; 5) расходится; 6) сходится;
7) сходится; 8) расходится; 9) расходится;
10) сходится; 11) сходится; 12) расходится;
13) сходится; 14) сходится; 15) сходится;
16) расходится; 17) расходится; 18) сходится;
19) расходится; 20) сходится; 21) сходится;
22) сходится; 23) сходится; 24) расходится.

11. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n$ на сходимость с помощью признака Коши.

Решение. Ряд положительный. Общий член ряда $a_n = \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$. Так как предел $\frac{3}{2} > 1$, то согласно признаку Коши ряд расходится.

12. Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$; 3) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n$; 5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{n}{5}}$; 6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin^n\frac{1}{2^{n-1}}$;

7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; 8) $\sum_{n=1}^{+\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$; 9) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$;

10) $\sum_{n=1}^{+\infty}[2+(0{,}1)^{n-1}]^n$; 11) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^n$; 12) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$;

13) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^n$; 14) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$; 15) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n$;

16) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n(n+1)^2$; 17) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$; 18) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{4^n}$;

19) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{7n}{3n+1}\right)^{2n+1}$; 20) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$; 21) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^2}$;

22) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; 23) $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{27}+\ldots$; 24) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{e^n}$.

Ответы:

1) сходится; 2) сходится; 3) сходится;
4) сходится; 5) сходится; 6) сходится;
7) расходится; 8) сходится; 9) сходится;
10) расходится; 11) расходится; 12) сходится;
13) сходится; 14) сходится; 15) сходится;
16) сходится; 17) сходится; 18) сходится;
19) расходится; 20) сходится; 21) сходится;
22) расходится; 23) сходится; 24) сходится.

13. Опираясь на формулу Стирлинга, докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$ расходится.

Решение. Согласно формуле Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ при $n \to +\infty$. Тогда $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ при $n \to +\infty$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{e}}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = +\infty > 1.$$

При этом воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{ln\, n}{\sqrt{n}}} = e^0 = 1$. Тогда ряд расходится согласно признаку Коши.

14. С помощью интегрального признака доказать сходимость ряда:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Решение. 1. Общий член ряда $a_n = \frac{1}{n^2+1} = f(n)$. Заменяя в этой формуле n на x, получаем функцию $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \geq 1$. Эта функция удовлетворяет условиям интегрального признака: она принимает положительные значения, непрерывна и убывает с возрастанием x. Вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \,\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как интеграл сходится, то сходится и данный ряд.

2. Функция $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$, $x \geq 1$, положительна, непрерывна и убывает, поэтому для исследования данного ряда на сходимость можно воспользоваться интегральным признаком. Находим

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{d\ln(x+1)}{\ln^2(x+1)} = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\ln(x+1)}\Big|_1^b =$$
$$= -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{\ln(b+1)} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Видим, что соответствующий несобственный интеграл равен конечному числу, то есть сходится, значит, и данный ряд также сходится.

15. Исследуйте ряд на сходимость с помощью интегрального признака:

1) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$; 2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n \ln^2(\ln n)}$; 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+10n}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$; 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$; 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$; 9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$;

10) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$; 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(3n-1)}$; 12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$;

13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{8+\ln^2 n}}$; 14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^2}$; 15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Ответы:

1) расходится; 2) сходится; 3) расходится;
4) сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$; 5) расходится; 6) расходится;
7) сходится; 8) сходится; 9) сходится;
10) сходится; 11) сходится; 12) сходится;
13) расходится; 14) расходится; 15) сходится.

16. Исследуйте на сходимость знакочередующийся ряд:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} n$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)n^2}$.

Решение. 1. Ряд является знакочередующимся. Общий член ряда очевидно не стремится к нулю, значит, не выполнен необходимый признак сходимости ряда и ряд расходится.

2. Ряд является знакочередующимся. Напомним формулировку признака Лейбница: если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится.

Общий член нашего ряда равен $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Так как последовательность $\{|a_n|\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится.

3. Ряд является знакочередующимся. Общий член ряда $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)n^2}$. Так как последовательность $\{|a_n|\} = \left\{\frac{1}{(n+1)n^2}\right\}$ монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится.

17. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3-i}{2}\right)^n$.

Решение. 1. Ряд сходится по признаку Лейбница. Выясним, условно или абсолютно сходится ряд. Для этого составим и исследуем на сходимость соответствующий ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Получили гармонический ряд. Этот ряд расходится, следовательно, исходный ряд сходится условно.

2. Ряд сходится по признаку Лейбница. Выясним, условно или абсолютно сходится ряд. Для этого составим и исследуем на сходимость соответствующий ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)n^2}.$$

Полученный положительный ряд сравним с другим положительным рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. Последний ряд сходится.

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)n^2} : \frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0, \infty,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)n^2}$ сходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Таким образом, ряд сходится абсолютно.

3. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}-i}{4}\right)^n$ сходится абсолютно.

Составим и исследуем на сходимость ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\left(\frac{\sqrt{3}-i}{4}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{|\sqrt{3}-i|}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Последний ряд (3) сходится как ряд-сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2} \in (-1; 1)$.

Таким образом, ряд сходится абсолютно.

18. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{\ln^n 3}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\frac{\pi n}{4}}{n}$; 5) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n \ln^2(\ln n)}$; 6) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$;

7) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^3 n}$; 8) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n \ln(\ln n)}$; 9) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln n}$;

10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln 2n}$; 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$; 12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

Ответы:

1)	сходится абсолютно;	2)	сходится условно;	3)	сходится абсолютно;
4)	сходится условно;	5)	сходится абсолютно;	6)	сходится условно;
7)	сходится абсолютно;	8)	сходится условно;	9)	расходится;
10)	сходится условно;	11)	сходится условно;	12)	сходится абсолютно.

19. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд с комплексными членами:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-i)^n}{3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+3i}{n(n+1)}$; 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n n}{2^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$; 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n i}{6n^2}$; 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-2i)^n}{4^n}$;

7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{in}{2n+1}$; 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n i}{n+1}$; 9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+i}{n^2+1}$;

10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n^2}$; 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n+i}{n^3}$; 12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+i)^n}{n^3}$;

13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+i)^n}{n!}$; 14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^{2n}}{5^n}$; 15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$;

16) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}-i}{n^3}$; 17) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{1+i}$; 18) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+2i}{n^2}$;

19) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+in}{n^2}$; 20) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+i}{n^3}$; 21) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i\sqrt{n}}{n^2+1}$;

22) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2-i\sqrt{n}}{n}$; 23) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{2^n-1}$; 24) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3-i}{2}\right)^n$.

Ответы:

1) сходится абсолютно; 2) сходится абсолютно; 3) сходится абсолютно;

4) расходится; 5) сходится абсолютно; 6) сходится абсолютно;

7) расходится; 8) сходится условно; 9) сходится абсолютно;

10) расходится; 11) сходится абсолютно; 12) расходится;

13) сходится абсолютно; 14) сходится абсолютно; 15) сходится абсолютно;

16) сходится абсолютно; 17) расходится; 18) сходится абсолютно;

19) расходится; 20) сходится абсолютно; 21) сходится абсолютно;

22) расходится; 23) сходится абсолютно; 24) расходится.

ГЛАВА II. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 1. Понятие функциональной последовательности и функционального ряда

Определение 1. Функциональной последовательностью называется последовательность комплексных функций комплексного переменного, заданных на одном и том же множестве D:

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots . \tag{1}$$

В частности, функции $f_n(z)$ могут быть комплексными или действительными функциями действительного переменного.

Для функциональной последовательности (1) также будем использовать следующие обозначения:

$$\{f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots\}; \quad \{f_n(z)\}, n = 1, 2, \dots; \quad \{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}; \quad \{f_n(z)\}.$$

Примеры

1. $1, z, z^2, \dots, z^n, \dots$, где $z \in \mathbf{C}$.

2. $\ln x, \ln^2 x, \dots, \ln^n x, \dots$, где $x \in (0, +\infty)$.

Определение 2. Пусть $z_0 \in D$. С помощью последовательности (1) образуем числовую последовательность

$$f_1(z_0), f_2(z_0), \dots, f_n(z_0), \dots . \tag{2}$$

Если числовая последовательность (2) сходится, то говорят, что функциональная последовательность (1) сходится в точке z_0. Множество всех точек сходимости последовательности (1) называется её областью сходимости.

Определение 3. Пусть $E \subset D$ область сходимости последовательности (1). В этом случае каждой точке $z_0 \in E$ можно поставить в соответствие число

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_0).$$

Тогда на множестве E можно задать функцию $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, $z \in E$. Эту функцию называют предельной для последовательности (1).

Таким образом, здесь мы встречаемся с новым важным способом задания функции.

В конкретных ситуациях часто задаётся функциональная последовательность без указания области сходимости, которую приходится находить.

Примеры

1. $\{x^n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Область определения данной функциональной последовательности есть $D = \mathbf{R}$. Ясно, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, -1 < x < 1, \\ 1, \quad x = 1. \end{cases}$$

При $x = -1$ получаем расходящуюся числовую последовательность $\{(-1)^n\}$. В остальных точках действительной оси $|x|^n \to \infty$ при $n \to \infty$, то есть последовательность в этих точках расходится.

Итак, установлена область сходимости $E = (-1; 1]$ функциональной последовательности $\{x^n\}$, $n = 1, 2, \dots$ (см. рис.).

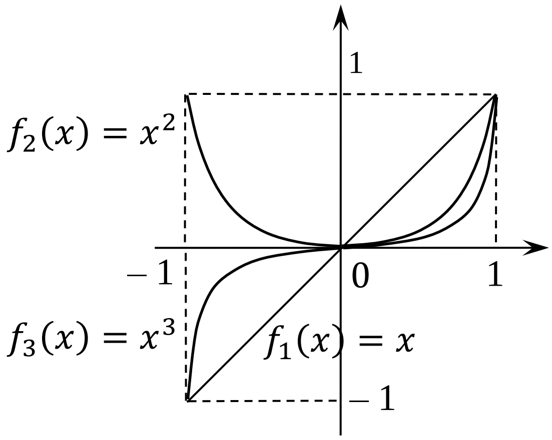
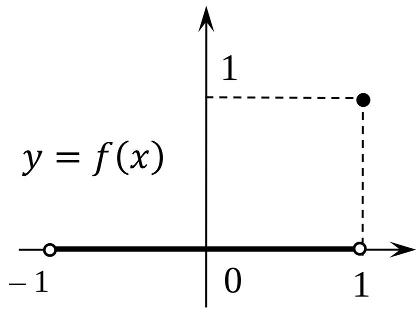


График предельной функции покажем на отдельном рисунке.



Заметим, что в этом примере функции последовательности непрерывны на $(-1; 1]$, а предельная функция будет разрывной.

2. $\{\ln^n x\}$, $n = 1,2, \dots$, $x \in D = (0; +\infty)$. Опираясь на предыдущий пример, можем сказать, что если $-1 < \ln x \le 1$, то последовательность сходится. В остальных случаях – расходится. А тогда для сходимости последовательности должно быть $1/e < x \le e$.

Итак, область сходимости $E = (1/e\,; e]$, причём предельная функция имеет вид

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \ln^n x = \begin{cases} 0, \text{ если } 1/e < x < e, \\ 1, \text{ если } x = e \end{cases}.$$

3) $\left\{\frac{1+nz^2}{1+n^2}\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $z \in D = \mathbf{C}$. Ясно, что $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+nz^2}{1+n^2} = 0$, $z \in \boldsymbol{C}$. Таким образом, функциональная последовательность сходится к предельной функции $f(z) = 0$ на множестве $E = \mathbf{C}$.

4) $\{z^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $z \in D = \mathbf{C}$. Найдём область сходимости этой последовательности. Ясно, что если $|z| < 1$, то $|z^n| = |z|^n \to 0$ при $n \to \infty$, значит и $z^n \to 0$ при $n \to \infty$. Если же $|z| > 1$, то $|z|^n \to +\infty$ и $\{z^n\}$ расходится. Таким образом, последовательность сходится в круге $|z| < 1$.

Исследуем поведение $\{z^n\}$ на окружности $|z| = 1$. Если $z = 1$, то $z^n = 1 \to 1$ при $n \to \infty$. Пусть $z \neq 1$. Представим z в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos\varphi + i\,sin\,\varphi,\ 0 < \varphi < 2\pi.$$

Тогда $z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Видим, что при наших условиях не существует предела $cos\,n\varphi$ при $n \to \infty$, значит не существует предела и z^n при $n \to \infty$.

Вывод: область сходимости E есть точки открытого круга $|z| < 1$ и точка $z = 1$.

Определение 3. Пусть дана функциональная последовательность (1). Выражение вида

$$f_1(z) + f_2(z) + \ \ldots + f_n(z) + \ \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \tag{3}$$

называют функциональным рядом.

Функциональная последовательность

$$\{S_n(z)\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right\} \tag{4}$$

называется последовательностью частных сумм ряда (3).

Говорят, что ряд (3) сходится в точке z_0 к $f(z_0)$, если

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z_0) = f(z_0).$$

Областью сходимости ряда (3) называется область сходимости последовательности (4). Сумма ряда (3) есть предельная функция последовательности (4). Если $f(z)$ сумма ряда, то пишут

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ \ldots + f_n(z) + \ \ldots\ = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),\ z \in E.$$

Если дана последовательность $\{S_n(z)\}$, то ей можно сопоставить функциональный ряд

$$S_1(z) + (S_2(z) - S_1(z)) + \ \ldots + (S_n(z) - S_{n-1}(z)) + \ \ldots,$$

частные суммы которого есть $\{S_n(z)\}$.

Так что теория функциональных рядов есть иная форма теории функциональных последовательностей.

Примеры

1. $z + (z^2 - z) + (z^3 - z^2) + \cdots + (z^n - z^{n-1}) + \cdots$.

Легко видеть, что $S_n(z) = z^n$, поэтому область сходимости ряда есть открытый круг $|z| < 1$ и точка $z = 1$. Сумма ряда $f(z) = \begin{cases} 0 \text{ , если } |z| < 1, \\ 1 \text{ , если } z = 1 \end{cases}$.

2. $1 + z + z^2 + \ \dots + z^n + \ \dots$.

Вспоминая геометрическую прогрессию, делаем заключение, что область сходимости ряда есть круг $|z| < 1$, сумма ряда равна $f(z) = \frac{1}{1-z}$ (аккуратные рассуждения проведите самостоятельно).

§ 2. Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда

Пусть последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится на множестве E к функции $f(z)$. Это значит, что

$$\forall z \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon; z) \ \forall n \ (n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon).$$

В этом определении номер N зависит от произвольно взятых ε и z. В этом случае говорят, что последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится к $f(z)$ на множестве E поточечно.

Если же потребовать независимости номера N от точки $z \in E$, то мы придём к определению равномерной сходимости.

Определение 1. Функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ называется равномерно сходящейся на множестве E к функции $f(z)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall z \in E \ \forall n \ (n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon). \quad (1)$$

Здесь N зависит только от ε, неравенство $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ выполняется при $n > N$ сразу для всех $z \in E$. Если $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно на множестве E к функции $f(z)$, то пишут $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$, $z \in E$, при $n \to \infty$.

Дадим эквивалентное определение равномерной сходимости.

Определение 1′. Функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ называется равномерно сходящейся на множестве E к функции $f(z)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \ (n > N \Rightarrow \sup_{z \in E} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon), \text{ то есть}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{z \in E} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Докажем эквивалентность определений 1 и $1'$.

1. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно на множестве E к функции $f(z)$ в смысле определения 1 и $\varepsilon > 0$ – произвольное. Тогда

$$\exists N \ \forall z \in E \ \forall n \left(n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Так как неравенство $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ справедливо для всех $z \in E$, то числовое множество $\{f_n(z) - f(z): z \in E\}$ ограничено сверху числом $\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, существует $\sup\limits_{z\in E}|f_n(z) - f(z)|$, при этом

$$\sup_{z\in E}|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно на множестве E к функции $f(z)$ в смысле определения $1'$.

2. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно на множестве E к функции $f(z)$ в смысле определения $1'$ и $\varepsilon > 0$ – произвольное. Тогда

$$\exists N \ \forall n \ (n > N \Rightarrow \sup_{z\in E}|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon).$$

Но если $\sup\limits_{z\in E}|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, то для всех $z \in E$ выполняется неравенство $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Таким образом,

$$\exists N \ \forall z \in E \ \forall n(n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon),$$

и функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно на множестве E к функции $f(z)$ в смысле определения 1.

Примеры

1. $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$, $x \in E = \mathbf{R}$. Эта последовательность равномерно сходится к $f(x) \equiv 0$ на всей действительной оси.

Действительно, зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Заметим, что $\left|\frac{\sin nx}{n} - 0\right| = \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ при $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ сразу для всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Тогда согласно определению 1 последовательность $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ равномерно сходится к $f(x) \equiv 0$ на всей действительной оси.

2. $\left\{\frac{z^n + nz}{n}\right\}$, $z \in E = \mathbf{C}$. Эта последовательность равномерно сходится к $f(z) = z$ в замкнутом круге $|z| \leq 1$. (Объясните, почему при $|z| > 1$ последовательность расходится?)

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in E}|f_n(z)-f(z)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in E}\left|\frac{z^n+nz}{n}-z\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in E}\frac{|z|^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Тогда согласно определению $1'$ последовательность $\left\{\frac{z^n+nz}{n}\right\}$ равномерно сходится к $f(z)=z$ в замкнутом круге $|z|\le 1$.

Замечание 1. Если существует стремящаяся к нулю последовательность $\{\alpha_n\}$ такая, что для всех $z\in E$ выполняется неравенство $|f_n(z)-f(z)|\le\alpha_n$, то последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится к функции $f(z)$ на множестве E.

Действительно, поскольку неравенство $|f_n(z)-f(z)|\le\alpha_n$ выполняется для всех $z\in E$, то $\sup_{z\in E}|f_n(z)-f(z)|\le\alpha_n$, а поэтому из условия $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ получаем, что $\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in E}|f_n(z)-f(z)|=0$.

Замечание 2. Ясно, что если последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится к $f(z)$ на множестве E, то она и поточечно сходится к $f(z)$ на E. Обратное, вообще говоря, не имеет места.

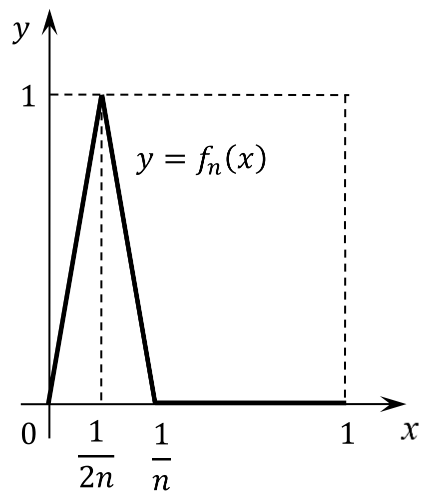
Пример

Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$, $x\in[0;1]$, где

$$f_n(x)=\begin{cases}2nx\ , & 0\le x<1/2n\,,\\ -2nx+2\ , & 1/2n\le x<1/n\,,\\ 0, & 1/n\le x<1.\end{cases}$$

Заметим, что $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$, $x\in[0;1]$.

График $f_n(x)$ показан на следующем рисунке.



Итак, последовательность сходится поточечно к нулю в каждой точке отрезка $[0;1]$. Однако сходимость не будет равномерной. Действительно, возьмём $\varepsilon = 1/2 > 0$, тогда какой бы номер N мы не взяли, при $n > N$ в точке $x = 1/(2n)$ будет $|f_n(1/(2n)) - 0| = 1 > 1/2$. Таким образом, выполнено отрицание (1):

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists z = z(N) \in E \ \exists n = n(N) \ (n > N \wedge |f_n(z) - f(z)| \geq \varepsilon).$$

Это означает, что равномерной сходимости нет.

Определение 2. Функциональный ряд

$$f_1(z) + f_2(z) + \ \dots + f_n(z) + \ \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$$

называется равномерно сходящимся к $f(z)$ на множестве E, если к $f(z)$ на E сходится равномерно последовательность частных сумм ряда.

Пусть

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ \dots + f_n(z) + \ \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)\,,$$

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ \dots + f_n(z).$$

Тогда

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ \dots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(z)$$

– остаток ряда.

Равномерная сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ на множестве E (согласно определению 2) означает, что $S_n(z) \rightrightarrows f(z)$, $z \in E$, при $n \to \infty$.

Последнее условие равносильно следующему условию

$$R_n(z) = S_n(z) - f(z) \rightrightarrows 0,\ z \in E, \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, равномерная сходимость на множестве E функционального ряда равносильна равномерной сходимости на множестве E к нулю последовательности его остатков. Отсюда в силу определения $1'$ получаем, что для того чтобы функциональный ряд равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z \in E} |R_n(z)| = 0.$$

§ 3. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда

Теорема 1. Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ сходилась равномерно на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \forall z \in E \ \forall n \ \forall p \geq 1 \ \big(n > N \Rightarrow \big|f_{n+p}(z) - f_n(z)\big| < \varepsilon\big). \qquad (1)$$

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$, $z \in E$, при $n \to \infty$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N \ \forall n \ \forall z \in E \ \left(n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Если $n > N$, то тем более $n + p > N$ при любом $p \geq 1$, а тогда для всех $z \in E$ справедливо неравенство $\left|f_{n+p}(z) - f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\left|f_{n+p}(z) - f_n(z)\right| = \left|\left(f_{n+p}(z) - f(z)\right) - (f_n(z) - f(z))\right| \leq$$
$$\leq \left|f_{n+p}(z) - f(z)\right| + |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $z \in E$ при $n > N$ и любом $p \geq 1$. Таким образом, (1) выполнено.

2. Достаточность. Пусть выполняется соотношение (1). Оно имеет место для всех $z \in E$. Рассмотрим произвольную точку $z_0 \in E$, тогда для заданного $\varepsilon > 0$

$$\exists N \ \forall n \ \forall p \geq 1 \ (n > N \Rightarrow \left|f_{n+p}(z_0) - f_n(z_0)\right| < \varepsilon). \qquad (2)$$

Но это означает, что числовая последовательность $\{f_n(z_0)\}$ является фундаментальной. Так как $\boldsymbol{C}$ – полное метрическое пространство, то $\{f_n(z_0)\}$ сходится.

Таким образом, поскольку z_0 выбиралась произвольно, для последовательности $\{f_n(z)\}$ существует предельная функция $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, $z \in E$.

В неравенстве $\left|f_{n+p}(z) - f_n(z)\right| < \varepsilon$ соотношения (1) перейдём к пределу при $p \to \infty$ и любом фиксированном $n > N$. Получим $|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon$ при $n > N$ для всех $z \in E$. Но это и означает, что $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ на E.

Замечание 1. Теорема 1 имеет место и тогда, когда $\{f_n(z)\}$ последовательность действительных функций, причём предельная функция в этом случае является действительной, что следует из полноты пространства **R**.

Доказанную теорему можно перефразировать для рядов.

Теорема 2. Для того чтобы функциональный ряд

$$f_1(z) + f_2(z) + \ \dots + f_n(z) + \ \dots$$

равномерно сходился к некоторой функции $f(z)$ на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \forall z \in E \ \forall n \ \forall p \geq 1 \ (n > N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ \dots + f_{n+p}(z)\right| < \varepsilon).$$

Доказательство. Равномерная сходимость ряда есть равномерная сходимость последовательности его частных сумм $\{S_n(z)\}$. Остаётся заметить, что $S_{n+p}(z) - S_n(z) = f_{n+1}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)$, и сослаться на теорему 1.

Замечание 2. Теорема 2 имеет место для действительных рядов, причём сумма ряда будет являться действительной функцией. Это следует из замечания 1.

Следствие (необходимое условие равномерной сходимости ряда). Если функциональный ряд $f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$ равномерно сходится на множестве E, то $f_n(z) \rightrightarrows f(z) \equiv 0$, $z \in E$, при $n \to \infty$.

§ 4. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Пусть дан функциональный ряд

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots \tag{1}$$

и положительный числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots . \tag{2}$$

Если для любых $z \in E$ и для любых n справедливо неравенство $|f_n(z)| \leq a_n$, то говорят, что ряд (1) мажорируется рядом (2) на множестве E.

Теорема (Вейерштрасс). Если функциональный ряд (1) на множестве E мажорируется сходящимся положительным числовым рядом (2), то ряд (1) сходится на множестве E абсолютно и равномерно.

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда (1) следует из неравенства $|f_n(z)| \leq a_n$ и признака сравнения положительных рядов.

Покажем равномерную сходимость ряда (1) на E. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Так как ряд (2) сходится, то в силу критерия Коши

$$\exists N \ \forall n \ \forall p \geq 1 \ (n > N \Rightarrow a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon).$$

Заметим, что

$$\left|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)\right| \leq$$

$$\leq |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \ldots + \left|f_{n+p}(z)\right| \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}$$

для всех $z \in E$. Тогда

$$\exists N \ \forall z \in E \ \forall n \ \forall p \geq 1 \ (n > N \Rightarrow \left|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)\right| < \varepsilon).$$

В силу теоремы 2 из § 3 главы II ряд сходится равномерно.

Пример. $\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ \dots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ \dots.$

Для всех $x \in \mathbf{R}$ имеем $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Значит, данный ряд сходится равномерно на всей действительной оси в силу признака Вейерштрасса.

§ 5. Условия непрерывности предельной функции и суммы функционального ряда

Теорема 1. Если последовательность непрерывных функций $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно на множестве E к функции $f(z)$, то $f(z)$ – непрерывная функция на E.

Доказательство. Пусть z_0 – произвольная точка E. Необходимо доказать, что $f(z)$ непрерывна в точке z_0.

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Имеем

$$|f(z)-f(z_0)| = |(f(z)-f_n(z)) + (f_n(z)-f_n(z_0)) + (f_n(z_0)-f(z_0))| \le$$
$$\le |f(z)-f_n(z)| + |f_n(z)-f_n(z_0)| + |f_n(z_0)-f(z_0)|. \qquad (1)$$

Так как $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$, то

$$\exists N\ \forall z \in E\ \forall n\ (n > N \Rightarrow |f_n(z)-f(z)| < \varepsilon/3). \qquad (2)$$

В частности, в точке z_0

$$|f_n(z_0)-f(z_0)| < \varepsilon/3 \text{ при } n > N. \qquad (3)$$

Пусть теперь в неравенствах (1), (2) и (3) номер $n = n_0$ фиксирован и $n_0 > N$. Так как все функции $f_n(z)$ непрерывны в точке z_0, то для заданного выше $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0\ \forall z\ \left(|z-z_0| < \delta \Rightarrow \left|f_{n_0}(z)-f_{n_0}(z_0)\right| < \varepsilon/3\right). \qquad (4)$$

Из неравенств (1), (2), (3) и (4) имеем $|f(z)-f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

при $|z-z_0| < \delta$, что и означает непрерывность функции f в точке z_0.

Замечание 1. Из теоремы вытекает, что если последовательность непрерывных функций $\{f_n(z)\}$ сходится к разрывной функции $f(z)$ на E, то $\{f_n(z)\}$ не может сходиться равномерно к $f(z)$ на E.

Так, в § 1 главы II мы рассмотрели последовательность непрерывных функций $\{x^n\}$ и показали, что на $E = (-1; 1]$ она сходится к разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & -1 < x < 1, \\ 1\ , & x = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $\{x^n\}$ неравномерно сходится на $(-1; 1]$ к $f(z)$.

Замечание 2. В § 1 главы II мы привели пример последовательности непрерывных функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx\ , & 0 \le x < 1/2n\,, \\ -2nx + 2\ , & 1/2n \le x < 1/n\,, \\ 0, & 1/n \le x < 1, \end{cases}$$

которая неравномерно сходится на $[0; 1]$ к непрерывной функции $f(x) \equiv 0$.

Этот пример показывает, что равномерная сходимость не является необходимым условием непрерывности предельной функции.

Доказанная теорема легко перефразируется для функциональных рядов.

Теорема 2. Если функции $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны на множестве E, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходится на E к функции $f(z)$, то $f(z)$ непрерывна на E.

Доказательство. Члены последовательности частных сумм $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ являются непрерывными функциями как конечные суммы непрерывных функций.

Тогда для доказательства непрерывности суммы $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)$ функционального ряда остаётся применить теорему 1.

§ 6. Метрические пространства $M[a; b]$, $C[a; b]$ и их полнота

В начале нашего курса мы ввели метрическое пространство $M[a; b]$. Это множество всех действительных ограниченных функций, заданных на $[a; b]$. Метрика в этом пространстве следующая:

$$\rho(f_1; f_2) = \sup_{x\in[a;b]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Пусть теперь дана последовательность точек этого пространства $\{f_n\}$ и точка $f \in M$.

Сходимость $\{f_n\}$ к f в метрическом пространстве $M[a; b]$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n; f) = 0$. Тогда в силу определения $1'$ из § 2 этой главы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a; b]$ к функции $f(x)$. Таким образом, сходимость в пространстве $M[a; b]$ последовательности $\{f_n\}$ к $f \in M[a; b]$ равносильна равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Теорема 1. Пространство $M[a; b]$ полное.

Доказательство. Нужно показать, что в этом пространстве всякая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Пусть дана фундаментальная последовательность $\{f_n\}$ точек из $M[a;b]$, то есть функциональная последовательность ограниченных на $[a;b]$ функций, для которой

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\forall m\ (n,m > N \Rightarrow \sup_{x\in[a;b]}|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

Но если $\sup\limits_{x\in[a;b]}|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, то для всех $x \in [a;b]$ выполняется $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Вспоминая критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (теорема 1 § 3 главы II), делаем заключение, что $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a;b]$ к некоторой функции $f(x)$.

Остаётся доказать, что $f(x)$ ограниченная функция на $[a;b]$, то есть $f \in M[a;b]$.

Так как $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ на $[a;b]$, то

$$\exists N\ \forall n\ \forall x\ (n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < 1).$$

Пусть n_0 – фиксированное число такое, что $n_0 > N$, тогда для всех $x \in [a;b]$ выполняется $\left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| < 1$.

Пусть далее $\left|f_{n_0}(x)\right| \le M_0$, так как $f_{n_0}(x) \in M[a;b]$. Тогда

$$|f_n(x)| = \left|f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)\right| \le \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x)\right| < 1 + M_0.$$

Видим, что $f(x)$ ограниченная функция.

Рассмотрим теперь подпространство пространства $M[a;b]$ – множество всех непрерывных на $[a;b]$ функций. Этим мы сохраняем метрику, введённую в $M[a;b]$. В нашем случае

$$\rho(f_1;f_2) = \sup_{x\in[a;b]}|f_1(x) - f_2(x)| = \max_{x\in[a;b]}|f_1(x) - f_2(x)| = \|f_1 - f_2\|,$$

так как работает теорема Вейерштрасса о достижении наибольшего значения непрерывной функции $|f_1(x) - f_2(x)|$ на отрезке $[a;b]$. Ясно, что рассматриваемое множество непрерывных на $[a;b]$ функций является метрическим пространством, которое обозначается через $C[a;b]$. Ясно также, что сходимость последовательности точек в этом пространстве есть равномерная сходимость соответствующей функциональной последовательности на $[a;b]$.

Теорема 2. Пространство $C[a;b]$ полное.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ – фундаментальная последовательность из $C[a;b]$. Так как $C[a;b] \subset M[a;b]$, то, как это было показано в теореме 1, функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к некоторой функции на $f(x)$ на $[a;b]$. По теореме 1 из § 5 этой главы функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то есть $f \in C[a;b]$.

Результаты § 6 можно существенно обобщить. Так, например, можно рассматривать комплекснозначные функции на некотором множестве метрического пространства $\boldsymbol{C}$. Определение пространств $M(\boldsymbol{C})$ и $C(\boldsymbol{C})$ такое же, и так же доказывается их полнота.

§ 7. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование функциональной последовательности и функционального ряда

В этом параграфе пойдёт речь о действительных функциях действительного переменного.

Теорема 1. Пусть $\{f_n(x)\} \subset C[a;b]$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

Доказательство. Заметим, что в силу полноты пространства $C[a;b]$ функция $f(x)$ непрерывна, а значит интегрируема.

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$

$$\exists N \ \forall x \in [a;b] \ \forall n \ \left(n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{b-a}\right).$$

Тогда

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx <$$

$$< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

при $n > N$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, что и требовалось доказать.

Замечание. Без предположения равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$ утверждение теоремы может оказаться неверным.

Пример

Пусть $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$, $x \in [0;1]$. Заметим, что при каждом фиксированном $x \in [0;1]$ будет $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2xe^{-n^2x^2}\right) = 0$, то есть последовательность сходится на $[0;1]$ к $f(x) \equiv 0$. Отметим, что $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{e}$ и $f_n\left(\frac{1}{n}\right) \to +\infty$ при $n \to \infty$, то есть последовательность сходится неравномерно к своей предельной функции на $[0;1]$.

Далее, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 2n^2xe^{-n^2x^2}dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-e^{-n^2x^2}\right)\Big|_0^1 =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - e^{-n^2}\right) = 1.$

С другой стороны, $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0dx = 0.$

Таким образом, $\int_0^1 f(x)dx \neq \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx.$

Теорема 1 соответствующим образом перефразируется для функциональных рядов.

Теорема 2. Если $\{f_n(x)\} \subset C[a;b]$ и ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \ \dots + f_n(x) + \ \dots \qquad (1)$$

сходится равномерно к $f(x)$ на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $S_n(x)$ – частные суммы ряда (1). Тогда ясно, что $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ \dots + f_n(x)$ непрерывные на $[a;b]$ функции и

$$\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)dx.$$

Кроме того, $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$, поэтому по теореме 1 имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_n(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)dx.$$

Ясно, что замечание, сделанное после теоремы 1, можно отнести и к теореме 2.

Теорема 3. Пусть $\{f_n(x)\}$ определена на $[a;b]$, существуют $f_n'(x)$, причём $f_n'(x) \in C[a;b]$, $n = 1,2, \dots$. Если $\{f_n(x)\}$ на $[a;b]$ сходится к $f(x)$, а $\{f_n'(x)\}$ равномерно сходится на $[a;b]$, то существует $f'(x)$ и

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Доказательство. Пусть $f_n'(x) \rightrightarrows \psi(x)$ на $[a;b]$, тогда по теореме 1

$$\int_a^x \psi(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(x)dx,\ x \in [a;b].$$

Но $\int_a^x f_n'(x)dx = f_n(x) - f_n(a)$, следовательно

$$\int_a^x \psi(x)dx = \lim_{n\to\infty}[f_n(x) - f_n(a)] = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(x) - f(a).$$

Откуда $f(x) = \int_a^x \psi(x)dx + f(a)$, где $\int_a^x \psi(x)dx$ – интеграл с переменным верхним пределом. Так как $\psi(x) \subset C[a;b]$, то, дифференцируя последнее равенство, получим $f'(x) = \psi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Перефразируем теорему для рядов.

Теорема 4. Пусть члены ряда

$$f_1(x) + f_2(x) + \ \dots + f_n(x) + \ \dots \tag{1}$$

определены на отрезке $[a; b]$ и имеют непрерывные производные $f_n'(x)$ на этом отрезке. Если на $[a; b]$ ряд (1) сходится к $f(x)$, а ряд

$$f_1'(x) + f_2'(x) + \ \dots + f_n'(x) + \ \dots \tag{2}$$

сходится равномерно, то существует $f'(x)$, причём

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Доказательство. Пусть $S_n(x)$ – частные суммы ряда (1). Тогда существуют $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$, причём $S_n'(x) \in C[a; b]$. Видим, что $\{S_n'(x)\}$ есть последовательность частных сумм ряда (2), а тогда она сходится равномерно на $[a; b]$. По теореме 3 существует $f'(x)$ и $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

ГЛАВА III. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 1. Понятие степенного ряда. Круг и радиус сходимости степенного ряда

Определение 1. Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots, \qquad (1)$$

где $a, c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ – постоянные комплексные числа, а z – комплексная переменная, называется степенным рядом.

Мы видим, что функции $f_n(z) = c_n(z-a)^n$, образующие степенной ряд, определены на всей комплексной плоскости, то есть для всех $z \in \boldsymbol{C}$.

Ясно, что для задания степенного ряда достаточно задать число a, называемое центром сходимости ряда, и числа $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$, называемые коэффициентами ряда (1).

Если $a, c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ – действительные числа, а $z = x$ – действительная переменная, то ряд (1) превращается в действительный степенной ряд, то есть получается частный случай ряда (1).

Займёмся изучением структуры области сходимости ряда (1). Заметим, что ряд (1) всегда сходится, причём абсолютно, в точке $z = a$, и его сумма равна c_0.

Существуют ряды, сходящиеся на всей комплексной плоскости.

Пример

$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$

Пусть $z \neq 0$ – произвольное фиксированное комплексное число. Тогда ряд будет числовым. Исследуем его на абсолютную сходимость с помощью аналога признака Даламбера. Имеем

$$D = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1} n!}{(n+1)!\, z^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

для любого $z \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$. При $z = 0$ ряд также сходится. Итак, ряд сходится и абсолютно на всей плоскости.

Существуют ряды, сходящиеся только в точке $z = a$.

Пример

$1 + (z-a) + 2!\,(z-a)^2 + \ldots + n!\,(z-a)^n + \ldots\,.$

Пусть $z \neq a$, тогда $|z-a| \neq 0$. Далее,

$$D = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!\,(z-a)^{n+1}}{n!\,(z-a)^n}\right| = |z-a| \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$$

для любого $z \neq a$. Ряд сходится только в точке $z = a$.

Существуют степенные ряды, область сходимости которых есть правильная часть плоскости, не совпадающая с точкой $z = a$.

Пример

$1 + z + z^2 + \ \dots + z^n + \ \dots$.

Это геометрическая прогрессия, область сходимости которой есть открытый круг $|z| < 1$.

Структуру области сходимости ряда (1) выясняет

Теорема 1 (Коши – Адамар). Пусть дан ряд (1) и пусть $K = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$. При $0 < K < +\infty$ ряд сходится абсолютно в круге $|z - a| < \frac{1}{K}$ и расходится вне этого круга, то есть при $|z - a| > \frac{1}{K}$. При $K = 0$ ряд сходится абсолютно на всей плоскости, при $K = +\infty$ ряд сходится абсолютно только в точке $z = a$.

Доказательство. Пусть $0 < K < +\infty$. Исследуем ряд на абсолютную сходимость с помощью аналога признака Коши–Адамара сходимости положительных рядов. Имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n||z - a|^n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|z - a| \sqrt[n]{|c_n|}\right) =$$
$$= |z - a| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = |z - a| K.$$

Заметим, что мы применили здесь одно из свойств верхнего предела: если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ последовательности неотрицательных чисел, $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = b$, то $\overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = ab$. Применительно к нашему случаю нужно положить $a_n = |z - a|$ – постоянная последовательность, а $b_n = \sqrt[n]{|c_n|}$.

Итак, при $|z - a|K < 1$ и $|z - a| \neq 0$ ряд сходится абсолютно. Но и при $|z - a| = 0$, то есть в точке $z = a$, как отмечено выше, ряд сходится абсолютно.

Таким образом, при $|z - a|K < 1$ ряд сходится абсолютно, то есть сходится абсолютно в круге $|z - a| < \frac{1}{K}$.

Если же $|z - a|K > 1$, то ряд расходится, то есть ряд расходится во внешности круга $|z - a| < \frac{1}{K}$.

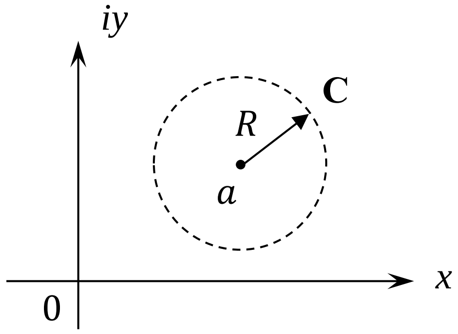
Пусть теперь $K = 0$. Тогда $|z - a|K < 1$ для всех z, ряд сходится абсолютно на всей плоскости

Пусть теперь $\text{К} = +\infty$. Тогда для всех $z \neq a$ величина $|z - a|K = +\infty$, и ряд расходится всюду, кроме точки $z = a$, где он сходится абсолютно.

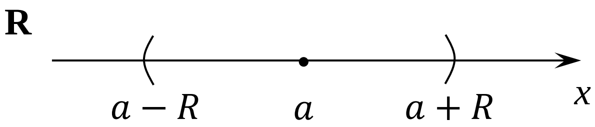
Определение 2. Если для ряда (1) $0 < K < +\infty$, где $K = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$, то число $R = \frac{1}{K}$ называют радиусом сходимости ряда (1), а круг $|z - a| < R$ – кругом сходимости ряда (см. рис.).

Если $K = 0$, то ряд сходится абсолютно на всей комплексной плоскости, поэтому естественно считать $R = +\infty$, а всю плоскость – кругом сходимости.

Если $\mathrm{K} = +\infty$, то ряд сходится абсолютно только в точке $z = a$. Считают, что $R = 0$, а круг сходимости вырождается в точку $z = a$.



Замечание 1. Если ряд (1) является действительным, то для него, естественно, остаётся верным все сказанное выше. Но в этом случае говорят не о круге сходимости, а об интервале сходимости. Неравенство $|x - a| < R$, равносильное двойному неравенству $-R < x - a < R$, определяет интервал $(a - R; a + R)$ с центром в точке $x = a$, который и называют интервалом сходимости действительного ряда (1) (см. рис.).



Замечание 2. В практических задачах для нахождения радиуса сходимости часто применяют не только теорему Коши – Адамара, но и следующие предложения.

Теорема 2 (Коши). Если для ряда (1) существует конечный или бесконечный предел $K = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$, то радиус сходимости $R = \frac{1}{K}$.

Теорема 3 (Даламбер). Если в ряде (1) все коэффициенты c_n отличны от нуля и существует конечный или бесконечный предел $D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, то радиус сходимости $R = \frac{1}{D}$.

Теорема 2 есть частный случай теоремы 1, а теорема 3 доказывается так же, как и теорема 1, то есть путём исследования ряда (1) на абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера, что мы делали в начале параграфа применительно к конкретным рядам.

Пример

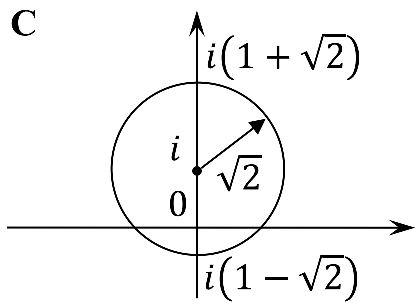
Найдём радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^{2n}}{2^n}$.

Для нашего случая последовательность коэффициентов ряда $\{c_n\}=\left\{0,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{8},0,\frac{1}{16},\ldots\right\}$. Тогда

$$\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}=\left\{0,0,\sqrt[2]{\frac{1}{2}},0,\sqrt[4]{\frac{1}{2^2}},0,\sqrt[6]{\frac{1}{2^3}},0,\sqrt[8]{\frac{1}{2^4}},\ldots\right\},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Радиус сходимости $R=\sqrt{2}$. Итак, ряд сходится в круге $|z-i|<\sqrt{2}$ и расходится вне этого круга.



Заметим, что в этом примере применить аналог признака Даламбера для нахождения радиуса сходимости нельзя, так как последовательности $\left\{\frac{c_{n+1}}{c_n}\right\}$ не существует, ибо $c_0=c_1=c_3=\ldots=c_{2n-1}=\ldots=0$. Однако если применить признак Даламбера в такой форме

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-i)^{2n+2}\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot(z-i)^{2n}}\right|=\frac{|z-i|^2}{2},$$

то получим, что при $\frac{|z-i|^2}{2}<1$ ряд сходится абсолютно, а при $\frac{|z-i|^2}{2}>1$ ряд расходится. Тогда $R=\sqrt{2}$.

В этом решении мы смотрим на степенной ряд как на функциональный ряд с общим членом $f_n(z)=\frac{(z-i)^{2n}}{2^n}$.

Замечание 3. Ни в теореме Коши – Адамара, ни в теоремах Коши и Даламбера ничего не говорится о поведении ряда на окружности

$|z-a|=R$. На этой окружности ряд может сходиться, может и расходиться. Нужны дополнительные исследования.

Так, в предыдущем примере ряд на окружности $|z-i|=\sqrt{2}$ расходится. Действительно, в этом случае

$$\frac{|z-i|^{2n}}{2^n}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2n}}{2^n}=1\nrightarrow 0$$

при $n\to\infty$, то есть общий член ряда не стремится к нулю.

Примеры

1. Найдите область сходимости ряда $1+z+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{n^2}+\ \ldots$.

$D=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1,\,R=1.$

Ряд сходится абсолютно в круге $|z|<1$ и расходится вне этого круга.

Исследуем поведение ряда на окружности $|z|=1$.

Если точка z принадлежит окружности $|z|=1$, то $z=e^{i\varphi}$, $\varphi\in\mathbf{R}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|e^{in\varphi}|}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то заданный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ на окружности $|z|=1$ сходится абсолютно.

Вывод: область сходимости – замкнутый круг $|z|\le 1$.

2. Найдите область сходимости действительного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}$ при различных $\alpha\in\mathbf{R}$.

$$K=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^\alpha}}=\frac{1}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^\alpha}=1,\,R=1.$$

Итак, для всякого α ряд сходится абсолютно в интервале $(-1;1)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. Пусть $x=1$. Тогда получаем ряд Дирихле $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, который, как известно, сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Пусть $x=-1$. Получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Отсюда видим, что при $\alpha>1$ ряд сходится абсолютно, при $0<\alpha\le 1$ ряд сходится условно по признаку Лейбница, при $\alpha\le 0$ ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю при $n\to\infty$.

Вывод: при $\alpha>1$ ряд сходится на отрезке $[-1;1]$, при $0<\alpha\le 1$ ряд сходится на полуинтервале $[-1;1)$, при $\alpha<0$ ряд сходится на интервале $(-1{,}1)$.

§ 2. Свойства степенных рядов

Теорема 1. Пусть дан степенной ряд

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ \ldots \qquad (1)$$

с радиусом сходимости $R > 0$ и пусть r – произвольное число такое, что $0 < r < R$. Тогда ряд сходится равномерно в замкнутом круге $|z-a| \leq r$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку z_0 окружности $|z-a| = r$. Точка находится внутри круга сходимости и поэтому ряд (1) сходится абсолютно в точке z_0, то есть сходится положительный ряд

$$|c_0| + |c_1||z_0 - a| + \ \ldots + |c_n||z_0 - a|^n + \ \ldots =$$
$$= |c_0| + |c_1|r + \ldots + |c_n|r^n + \ \ldots . \qquad (2)$$

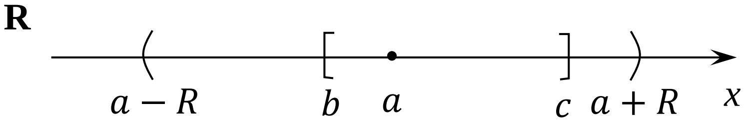
Но для всех z из круга $|z-a| \leq r$ выполняется неравенство $|z-a| \leq |z_0 - a| = r$. А тогда верны следующие неравенства:

$$|c_n||z-a|^n \leq |c_n||z_0 - a|^n = |c_n|r^n, n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

для всех z из круга $|z-a| \leq r$. Это означает что в круге $|z-a| \leq r$ ряд (1) мажорируется сходящимся положительным рядом (2). Таким образом, по признаку Вейерштрасса ряд (1) сходится равномерно в круге $|z-a| \leq r$.

Замечание 1. Теорема 1 говорит о том, что ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге, центр которого есть точка a и который находится внутри круга сходимости. Но тогда степенной ряд сходится равномерно и в любом замкнутом круге, находящемся внутри круга сходимости.

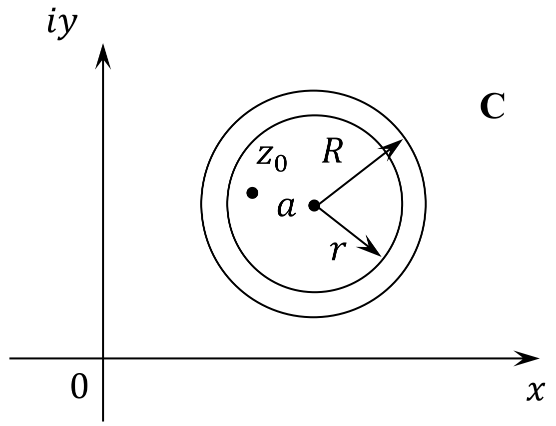
Замечание 2. Если ряд (1) действительный, то теорема 1 говорит о том, что ряд сходится равномерно на любом отрезке с центром в точке a, находящемся внутри интервала сходимости. Также нетрудно показать, что в этом случае степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке $[b; c]$, лежащем в интервале сходимости (см. рис.).



Теорема 2. Сумма степенного ряда (1) является функцией непрерывной внутри круга сходимости.

Доказательство. Пусть z_0 – произвольная точка из круга сходимости $|z-a| < R$. Нужно показать, что сумма $f(z)$ ряда (1) непрерывна в точке z_0.

Выберем число r такое, что $|z_0 - a| < r < R$.



По теореме 1 ряд (1) сходится равномерно в круге $|z-a| \le r$, члены ряда $c_n(z-a)^n$ непрерывные функции, поэтому по теореме об условиях непрерывности суммы функционального ряда сумма степенного ряда непрерывна в круге $|z-a| \le r$. Но так как точка z_0 принадлежит этому кругу, то сумма $f(z)$ ряда (1) непрерывна в точке z_0.

Замечание. Если ряд (1) действительный, то теорема говорит о том, что сумма этого ряда является функцией непрерывной внутри интервала сходимости.

Далее в этом параграфе пойдёт речь о действительных степенных рядах.

Теорема 3. Пусть дан степенной ряд

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ \ldots \qquad (3)$$

с радиусом сходимости $R > 0$. Тогда ряд можно почленно интегрировать на интервале сходимости $(a-R; a+R)$, то есть, если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, то для любого $x \in (a-R; a+R)$ выполняется

$$\int_a^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Доказательство. Выберем произвольно $x \in (a-R; a+R)$. Для определённости будем считать, что $x > a$. Так как функции $c_n(x-a)^n$ непрерывны на отрезке $[a; x]$, то, учитывая замечание 2 к теореме 1 о том, что ряд сходится равномерно на отрезке, содержащемся в интервале сходимости, заключаем, что доказываемая теорема является следствием теоремы об интегрировании действительного функционального ряда.

Замечание. В результате почленного интегрирования ряда

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ \ldots \qquad (3)$$

мы снова получаем степенный ряд:

$$c_0(x-a)+\frac{c_1}{2}(x-a)^2+\frac{c_2}{3}(x-a)^3+\ldots+\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}+\ \ldots. \qquad (4)$$

Если радиус сходимости ряда (3) есть $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}$, то каков радиус сходимости ряда (4)?

Пусть $x\neq a$, тогда $x-a\neq 0$. Умножим ряд (4) на $\frac{1}{x-a}$, получим степенный ряд

$$c_0+\frac{c_1}{2}(x-a)+\frac{c_2}{3}(x-a)^2+\ldots+\frac{c_n}{n+1}(x-a)^n+\ \ldots. \qquad (5)$$

Ясно, что ряды (4) и (5) сходятся в точке $x=a$. Во всех других точках $x\neq a$ ряды (4) и (5) сходятся или расходятся одновременно, так как от умножения ряда на число, отличное от нуля, его сходимость или расходимость не нарушается. А тогда ряды (4) и (5) имеют одинаковые радиусы сходимости, равные некоторому числу R'.

Если воспользоваться свойством верхнего предела произведения неотрицательных сходящейся и произвольной последовательностей, то снова получим равенство радиусов сходимости рядов (3) и (5) (а значит, интересующее нас равенство радиусов сходимости рядов (3) и (4)):

$$R'=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n+1}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}=R.$$

Таким образом, при интегрировании степенного ряда его радиус сходимости не меняется.

§ 3. Производная функции комплексного переменного. Дифференцирование степенного ряда. Ряд Тейлора

Определение 1. Пусть функция $f(z)$ задана в области D комплексной плоскости и точка $z_0\in D$. Производной $f(z)$ в точке z_0 называется

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z},$$

где, как обычно, $\Delta z=z-z_0$ – приращение аргумента, а $\Delta f(z_0)=f(z)-f(z_0)$ – приращение функции.

Отметим, что дифференцируемая функция является непрерывной. Действительно,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\Delta f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}\cdot\Delta z\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}\cdot\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z=f'(z_0)\cdot 0=0.$$

Так как определение производной функции комплексного переменного такое же, как и производной функции действительного переменного, то доказывают, точно так же, как и раньше, следующие правила дифференцирования функций:

1) $(c)' = 0$;
2) 2) $(z)' = 1$;
3) $(cf)' = cf'$;
4) $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'$;
5) $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_n + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n'$;
6) $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1' \cdot f_2 - f_1 \cdot f_2'}{f_2^2}$;
7) если даны функции $w = f(t)$ и $t = g(z)$, причём $g(z)$ дифференцируема в точке z, а $f(t)$ дифференцируема в соответствующей точке $t = g(z)$, то сложная функция $w = f[g(z)]$ дифференцируема в точке z и
$$\frac{dw}{dz} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dg}{dz}.$$

Заметим, что $(z - a)' = 1$, где $a = const$. Тогда из пункта 5 при натуральном n следует, что

$$\frac{d}{dz}(z - a)^n = n(z - a)^{n-1}.$$

Теорема. Пусть дан степенной ряд

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots \quad (1)$$

с радиусом сходимости $R > 0$. Тогда ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать, то есть существует $f'(z)$ и

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - a)^{n-1}, \ |z - a| < R.$$

Доказательство. Рассмотрим ряд из производных членов ряда (1):

$$c_1 + 2c_2(z - a) + 3c_3(z - a)^2 + \ldots + nc_n(z - a)^{n-1} + \ldots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - a)^{n-1}. \quad (2)$$

Покажем, что степенные ряды (1) и (2) имеют одинаковые радиусы сходимости.

Умножим ряд (2) на $z - a$:

$$c_1(z - a) + 2c_2(z - a)^2 + 3c_3(z - a)^3 + \ldots + nc_n(z - a)^n + \ldots . \quad (3)$$

Совершенно так же, как и в предыдущем параграфе, доказывается, что степенные ряды (3) и (2) имеют одинаковые радиусы сходимости. Пусть R – радиус сходимости ряда (1), а R' – рядов (2) и (3).

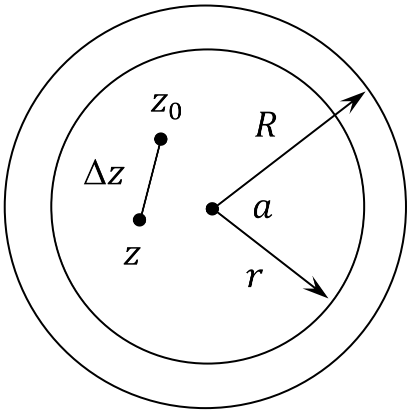
Далее,

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n|c_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n}\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}} = R.$$

Обоснование этих рассуждений такое же, как и соответствующих рассуждений в предыдущем параграфе.

Обозначим сумму ряда (2) через $\phi(z)$. Пусть z_0 – произвольная точка круга $|z-a|<R$. Нам нужно показать, что существует $f'(z_0)$ и $f'(z_0)=\phi(z_0)$. Для этого достаточно показать, что

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\phi(z_0)\right| = 0.$$



Преобразования разностного отношения дают

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n}{(z-a)-(z_0-a)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n[(z-a)^n-(z_0-a)^n]}{(z-a)-(z_0-a)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(z-a)^{n-1} + (z-a)^{n-2}(z_0-a) + \ \dots \ +$$

$$+(z-a)^{n-k}(z_0-a)^{k-1} + \dots \ +(z_0-a)^{n-1}].$$

Здесь мы использовали теорему о сложении рядов, умножении ряда на число и известную формулу.

$$\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \ldots + \alpha^{n-k}\beta^{k-1} + \ldots + \beta^{n-1}.$$

Далее,

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \phi(z_0) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(z-a)^{n-1} + (z-a)^{n-2}(z_0-a) + \ \dots \ + (z_0-a)^{n-1}] -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z_0-a)^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} c_n \,(\,[(z-a)^{n-1} + (z-a)^{n-2}(z_0-a) + \ \dots + (z_0-a)^{n-1}] -$$

$$-n(z_0-a)^{n-1} \,) +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n[(z-a)^{n-1} + (z-a)^{n-2}(z_0-a) + \ \dots + (z_0-a)^{n-1}] -$$

$$- \sum_{n=N+1}^{\infty} nc_n(z_0-a)^{n-1}. \qquad (4)$$

Здесь номер N пока произвольный.

Зададимся теперь произвольным $\varepsilon > 0$.

Пусть r – число такое, что $|z - z_0| < r < R$. Так как ряд (2) сходится абсолютно на окружности $|z - a| = r$, то сходится положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|r^{n-1}$. Но тогда остаток ряда стремится к нулю с возрастанием номера и по заданному ε находится номер N такой, что будет

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n|c_n|r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (5)$$

Будем теперь считать в правой части равенства (4) N таким номером.

Теперь произведём оценку трёх слагаемых в правой части равенства (4). Сначала оценим первое слагаемое. Заметим, что в силу непрерывности многочлен

$$\sum_{n=1}^{N} c_n[(z-a)^{n-1} + (z-a)^{n-2}(z_0-a) + \ldots + (z_0-a)^{n-1}]$$

при $z \to z_0$ имеет своим пределом число $\sum_{n=1}^{N} nc_n(z_0-a)^{n-1}$. Тогда

$$\exists \delta > 0 \forall z (|z - z_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sum_{n=1}^{N} c_n \,([(z-a)^{n-1} + (z-a)^{n-2}(z_0-a) + \ \dots + (z_0-a)^{n-1}] -$$

$$-n(z_0-a)^{n-1}| < \frac{\varepsilon}{3}). \qquad (6)$$

Оценим второе слагаемое.

Так как $|z_0 - a| < r$ и $z \to z_0$, то мы можем считать, что $|z - a| < r$. Тогда

$$|\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n[(z-a)^{n-1} + (z-a)^{n-2}(z_0-a) + \ldots + (z_0-a)^{n-1}]| \leq$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(|z-a|^{n-1} + |z-a|^{n-2}|z_0-a| + \ldots + |z_0-a|^{n-1}) <$$

$$< \sum_{n=N+1}^{\infty} n|c_n|r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (7)$$

Мы использовали неравенство (5).

Оценим третье слагаемое. Так как $|z_0 - a| < r$, то

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} nc_n(z_0-a)^{n-1}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} n|c_n||z_0-a|^{n-1} <$$
$$< \sum_{n=N+1}^{\infty} n|c_n|r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (8)$$

Опять использовано неравенство (5).

Теперь из равенства (4), неравенств (6), (7) и (8) имеем

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \phi(z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ при } |z-z_0| < \delta.$$

Замечание 1. Мы не только показали, что степенной ряд можно почленно дифференцировать, но и показали, что при дифференцировании радиус сходимости ряда не меняется. Это было отмечено в начале доказательства теоремы.

Замечание 2. Если ряд (1) действительный, то теорема говорит, что его можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости, и радиус сходимости ряда при дифференцировании не меняется.

Замечание 3. В результате дифференцирования степенного ряда получается степенной ряд. Но тогда его также можно дифференцировать и т. д. Таким образом, внутри круга сходимости ряд можно дифференцировать бесконечно много раз, а следовательно, сумма ряда имеет производные всех порядков.

Ряд Тейлора

Пусть дан степенной ряд

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ \ldots \qquad (1)$$

с радиусом сходимости $R > 0$.

Найдём производные всех порядков суммы $f(z)$ ряда (1)

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \ldots + nc_n(z-a)^{n-1} +$$
$$+(n+1)c_{n+1}(z-a)^n \ + \ \ldots,$$

$$f''(z) = 1\cdot 2c_2 + 2\cdot 3c_3(z-a) + \ldots + (n-1)nc_n(z-a)^{n-2} +$$
$$+n(n+1)c_{n+1}(z-a)^{n-1} + \ \ldots,$$

$$f'''(z) = 1\cdot 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4(z-a) + \ldots + (n-2)(n-1)nc_n(z-a)^{n-3} +$$
$$+(n-1)n(n+1)c_{n+1}(z-a)^{n-2} + \ \ldots,$$

. . .

$$f^{(n)}(z) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)nc_n + 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(n+1)c_{n+1}(z-a) + \ \ldots\ ,$$

. . . .

Положим в этих равенствах и в равенстве (1) $z = a$. Получим

$$f(a) = c_0, \quad f'(a) = c_1, \quad f''(a) = 2!\,c_2, \quad f'''(a) = 3!\,c_3, \ \ldots,$$
$$f^{(n)}(a) = n!\,c_n, \ \ldots .$$

Тогда

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

(как обычно, считаем здесь $f^{(0)}(a) = f(a)$).

Подставляя найденные выражения (2) для c_n в ряд (1), получим

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots . \tag{3}$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (3), называется рядом Тейлора функции $f(z)$. Таким образом, степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

Каждой функции $f(z)$, имеющей в точке $z = a$ производные всех порядков, можно поставить в соответствие ряд Тейлора. В этом случае пишут

$$f(z) \sim f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots,$$

так как неизвестно сходится ли ряд Тейлора к исходной функции.

Замечание. Если функция $f(z)$ является суммой двух степенных рядов с центром в точке $z = a$

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots,$$
$$f(z) = c_0' + c_1'(z-a) + c_2'(z-a)^2 + \ldots + c_n'(z-a)^n + \ldots,$$

то эти ряды совпадают, так как из приведенных выше рассуждений оба они являются рядом Тейлора функции $f(z)$. Таким образом, если $f(z)$ при заданном центре сходимости $z = a$ представляется степенным рядом, то единственным образом.

Конечно, если центры сходимости разные, то ряды Тейлора для функции будут различными[6].

[6] Голубев А.А., Граф С.Ю., Шеретов В.Г. Практический курс комплексного анализа: учеб. пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2003. – С. 46–52.

ГЛАВА IV. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

В этой главе пойдёт речь только о действительных функциях действительного переменного.

§ 1. Постановка задачи

Пусть на некотором интервале $(a-R; a+R)$ задана функция $f(x)$. Нельзя ли её представить в виде степенного ряда

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ \ldots ? \qquad (1)$$

Так как частные суммы ряда (1) являются многочленами, то в случае положительного ответа мы получили бы удобный способ приближённого вычисления значений функции, поскольку для вычисления значений многочлена нужны лишь одни арифметические операции.

Мы знаем, что если $f(x)$ представляется рядом (1), то ряд (1) является рядом Тейлора для $f(x)$. Для формального написания ряда Тейлора

$$f(x) \ \sim \ f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ \ldots$$

нужно, чтобы $f(x)$ имела в точке $x = a$ производные всех порядков.

Если ряд Тейлора сходится к своей функции на некотором интервале сходимости $(a-R; a+R)$, то говорят, что $f(x)$ раскладывается в степенной ряд на $(a-R; a+R)$. Если $f(x)$ раскладывается в степенной ряд, то, как это было показано ранее, $f(x)$ имеет производные всех порядков на интервале сходимости. Итак, как мы видим, существование производных всех порядков для $f(x)$ в некоторой окрестности $(a-R; a+R)$ является необходимым условием представления функции степенным рядом в этой окрестности, являющейся интервалом сходимости ряда.

Будет ли это условие и достаточным для представления функции степенным рядом? На этот вопрос приходится ответить отрицательно.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Функция, очевидно, имеет производные всех порядков на всей оси $(-\infty; +\infty)$. Далее, вспоминая геометрическую прогрессию, получаем, что

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ \ldots,$$

причём последнее равенство имеет место только на интервале $(-1; 1)$, хотя функция имеет производные всех порядков на всей числовой оси.

Более того, сходимость ряда Тейлора функции не гарантирует разложимости функции в степенной ряд, ибо сходящийся степенной ряд может быть рядом Тейлора для двух (и более) различных функций. Приведём соответствующий пример. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$$

Эта функция определена на всей числовой оси. Покажем, что она имеет производные всех порядков на всей оси.

Если $x\neq 0$, то $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, и вообще $f^{(n)}(x)=P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, $n=0,1,2,\dots$, где $P(t)$ – некоторый многочлен, что легко доказывается методом математической индукции.

Покажем, что и в точке $x=0$ функция имеет производные всех порядков, причём все они равны нулю. Первая производная

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0.$$

Допустим, что утверждение имеет место для всех производных до n-го порядка включительно. Тогда

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}P\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}P\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{tP(t)}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{Q(t)}{e^{t^2}},$$

где $Q(t)$ – некоторый многочлен. Если k – натуральное число, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^k}{e^{t^2}}=0,$$

что показывается легко с помощью правила Лопиталя. А тогда ясно, что

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{t\to\infty}\frac{Q(t)}{e^{t^2}}=0.$$

Итак, в силу индукции все производные функции $f(x)$ в точке $x=0$ равны нулю. Тогда все коэффициенты $c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ряда Тейлора функции $f(x)$ с центром в точке $x=0$ равны нулю, поэтому ряд сходится на всей оси к функции $\phi(x)\equiv 0$. Но $f(x)\neq 0$ для всех $x\neq 0$.

Замечание. Для степенных рядов в комплексной плоскости отмеченных неприятных обстоятельств быть не может, это будет показано в дальнейшем.

Из сказанного выше следует, что если для $f(x)$ написан ряд Тейлора, то этот ряд нужно исследовать на сходимость именно к функции $f(x)$. Делается это обычно с помощью формулы Тейлора[7].

---

[7] Голубев А.А. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного действительного переменного. Учебное пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т., 2015. – С. 42–47.

Пусть $f(x)$ имеет в точке $x = a$ и некоторой её окрестности производные всех порядков. Тогда для любого n можно написать формулу Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы. Заметим, что сумма слагаемых в правой части формулы Тейлора до остаточного члена является частной суммой ряда Тейлора функции $f(x)$. Обозначим частную сумму ряда Тейлора через $S_n(x)$. Тогда

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x).$$

Отсюда видим, что для того, чтобы функция $f(x)$ раскладывалась в степенной ряд на некотором промежутке, необходимо и достаточно, чтобы на этом промежутке остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при $n \to \infty$.

§ 2. Разложение в степенной ряд функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$

Прежде чем говорить о разложении упомянутых функций в ряд сделаем одно замечание.

Если для $f(x)$ написан ряд Тейлора с центром в точке $x = 0$, то его часто называют рядом Маклорена. Он имеет вид

$$f(x) \sim f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ \ldots .$$

Среди рядов Тейлора он выгодно отличается простотой.

Теперь докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. Если на отрезке $[-h; h]$ производные всех порядков функции $f(x)$ равномерно ограничены, то есть

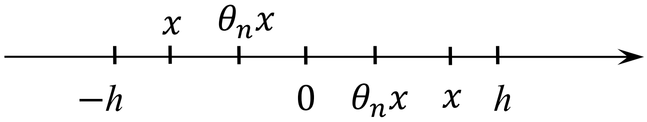
$$\exists M \forall n \forall x \in [-h; h]\left(\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M\right),$$

то на $[-h; h]$ функция $f(x)$ раскладывается в ряд Маклорена.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что остаточный член формулы Маклорена на $[-h; h]$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим остаточный член формулы Маклорена в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0 < \theta_n < 1.$$

Заметим, что точка $\theta_n x \in (-h; h)$ при любом n.



В силу условия леммы имеем

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta_n x)|}{(n+1)!}|x^{n+1}| \leq M\frac{h^{n+1}}{(n+1)!},\ x \in [-h; h]. \qquad (1)$$

Рассмотрим положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Легко видеть, что по признаку Даламбера он сходится, так как

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{h^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!h^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{h}{n+2} = 0 < 1.$$

Тогда общий член ряда $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to \infty$, и из (1) следует, что $R_n(x) \to 0$ на $[-h; h]$ при $n \to \infty$. Вспоминая отмеченный в конце предыдущего параграфа критерий разложения функции в степенной ряд, делаем вывод о справедливости доказываемого утверждения.

Применим лемму к функциям e^x, $\sin x$ и $\cos x$.

1. $f(x) = e^x$.

Ясно, что $f^{(n)}(x) = e^x$ для всех n. Пусть $h > 0$ – произвольное число. Тогда в силу возрастания функции $f(x) = e^x$ её производные $f^{(n)}(x) = e^x \leq e^h$ для $x \in [-h; h]$. Тогда e^x раскладывается в ряд Маклорена на $[-h; h]$. Но так как $h > 0$ произвольное, то это разложение имеет место на всей оси.

Формула Маклорена для e^x имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta_n x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0 < \theta_n < 1.$$

Тогда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ \ldots,\ x \in (-\infty; +\infty).$$

Эта формула даёт способ вычисления числа e. Положив $x = 1$, получим $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ \ldots$.

Заметим, что для остатка последнего числового ряда справедливы соотношения

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right]<$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right]=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n\cdot n!}.$$

Поэтому

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<e<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n\cdot n!}.$$

Тогда

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

причём погрешность этого равенства по недостатку будет меньше $\frac{1}{n\cdot n!}$.

2. $f(x)=\sin x$.

При выводе формулы Маклорена мы показали, что $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi k}{2}\right)$. Ясно, что для всех x верно неравенство $\left|f^{(k)}(x)\right|\le 1$. Вспомним формулу Маклорена для функции

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{\sin(\xi_m+m\pi)}{(2m)!}x^{2m},$$

ξ находится между 0 и x. Тогда

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\ \ldots,\ x\in(-\infty;+\infty).$$

3. $f(x)=\cos x$.

$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi k}{2}\right)$, $\left|f^{(k)}(x)\right|\le 1$ для всех x. Формула Маклорена

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\frac{\cos(\xi_m+(2m+1)\pi/2)}{(2m+1)!}x^{2m+1},$$

ξ находится между 0 и x. Тогда

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\ \ldots,\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Выведенные формулы удобны для вычисления приближённых значений $\sin x$ и $\cos x$. Ряды быстро сходятся и являются знакочередующимися.

§ 3. Разложение в степенной ряд логарифмической функции

Речь здесь идёт о функции $y = \ln(1+x)$.

Вспоминая геометрическую прогрессию, напишем

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,\ x \in (-1;1). \quad (1)$$

Степенной ряд можно почленно интегрировать внутри интервала сходимости. Тогда

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ \ldots,\ x \in (-1; 1),$$

то есть

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,\ x \in (-1; 1). \quad (2)$$

При $x = -1$ ряд принимает вид

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ \ldots - \frac{1}{n} - \ \ldots$$

и, очевидно, расходится.

При $x = 1$ ряд принимает вид

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} - \ \ldots,$$

который сходится по признаку Лейбница. Покажем, что он сходится к $\ln 2$, то есть

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ \ldots. \quad (3)$$

Заметим, что это равенство получить из равенства (2) формальной подстановкой $x = 1$ нельзя, так как при $x = 1$ ряд (1), из которого получилось равенство (2), расходится.

Рассмотрим сумму n членов геометрической прогрессии

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Это равенство верно для всех $x \neq -1$. Проинтегрируем его на отрезке $[0; 1]$, получим

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2 + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x}.$$

Для доказательства равенства (3) достаточно показать, что

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Имеем

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \ x \in (-1; 1]. \qquad (4)$$

Эта формула не пригодна для вычисления логарифмов чисел, так как ряд в правой части равенства сходится очень медленно. Однако с помощью формулы (4) можно получить формулы, удобные для вычисления логарифмов.

Заменим в формуле (4) x на $-x$, получим

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \ x \in [-1;1). \quad (5)$$

Вычтем ряд (4) из ряда (5) для $x \in [-1;1)$. Получим

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \ldots + \frac{x^{2m}}{2m+1} + \ldots\right), \ |x| < 1. \qquad (6)$$

Положим в формуле (6) $x = \frac{1}{2n+1}$, n – натуральное число. Тогда $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$, и

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \ldots\right). \qquad (7)$$

Положив здесь $n = 1$, получаем

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} + \frac{1}{7 \cdot 9^3} + \ldots\right).$$

Этот ряд сходится достаточно быстро. Формулу (7) можно переписать в виде

$$\ln(n+1) = \ln n + \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \ldots\right]. \qquad (8)$$

Положив здесь $n = 2$, получаем

$$\ln 3 = \ln 2 + \frac{2}{5}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{5 \cdot 5^4} + \ldots\right).$$

Таким образом, зная $\ln 2$, можно вычислить $\ln 3$.

Положив в (8) $n = 4$, получим

$$\ln 5 = 2\ln 2 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 81} + \frac{1}{5 \cdot 81^2} + \ldots\right).$$

Положив в (8) $n = 6$, получим

$$\ln 7 = \ln 2 + \ln 3 + \frac{2}{13}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 13^2} + \frac{1}{5\cdot 13^4} + \ldots\right).$$

Варьируя n в формуле (8), можно вычислять логарифмы дальнейших простых чисел. Зная логарифмы простых чисел и используя свойства логарифмов, просто вычислить логарифмы рациональных чисел, которыми мы и пользуемся на практике.

От натуральных логарифмов просто перейти к десятичным логарифмам по формуле $\lg x = M \ln x$, где $M = \frac{1}{\ln 10}$, так называемый модуль перехода. Его легко вычислить:

$$M = \frac{1}{\ln 2 + \ln 5} \approx 0{,}4343.$$

Мы наметили, конечно, лишь общую канву получения таблиц логарифмов, опустив многие детали.

§ 4. Разложение в степенной ряд $\operatorname{arctg} x$

Рассмотрим конечную сумму

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1 + x^2}.$$

Проинтегрируем это равенство на отрезке $[0; x]$, получим

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x + (-1)^n \int_0^x \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx.$$

Теперь заметим, что

$$\left|\int_0^x \frac{x^{2n+2} dx}{1+x^2}\right| < \left|\int_0^x x^{2n+2} dx\right| = \left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right| = \frac{|x^{2n+3}|}{2n+3} \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ и } |x| \leq 1.$$

Таким образом, получаем

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ \ldots\ + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ \ldots, |x| \leq 1. \qquad (1)$$

Легко найти радиус сходимости этого ряда, он равен 1. А тогда вне отрезка $[-1; 1]$ ряд расходится.

Положив $x = 1$, получим

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ \ldots\ + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ \ldots .$$

Этот ряд для вычисления π не годится, так как он сходится очень медленно. Однако некоторыми преобразованиями из ряда (1) можно получить ряд, удобный для вычисления π.

Рассмотрим угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. Тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{5\cdot 144}{6\cdot 119} = \frac{120}{119}.$$

Теперь рассмотрим угол $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}, \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

$$\pi = 16\alpha - 4\beta = 16\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

откуда, используя (1), получаем

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \ \dots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \ \dots\right).$$

Эта формула удобна для вычисления π, так как ряды в скобках сходятся очень быстро. Удобно делать оценку погрешности вычислений, так как ряды знакочередующиеся.

§ 5. Биномиальный ряд

Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Если $\alpha = n$ – натуральное, то по формуле бинома Ньютона имеем

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ \dots + x^n.$$

Это есть разложение в степенной ряд функции для данного случая.

Пусть α не является натуральным числом. Найдём ряд Маклорена для функции $f(x) = (1+x)^\alpha$. Имеем

$f(0) = 1,$

$f'(0) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}|_{x=0} = \alpha,$

$f''(0) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}|_{x=0} = \alpha(\alpha-1),$

. . .

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}|_{x=0} =$$
$$= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1),$$

. . . .

Тогда

$$(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ \dots .$$

Числа $\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называются биномиальными коэффициентами. Они имеют специальные обозначения C_α^n или чаще $\binom{\alpha}{n}$. Таким образом,

$$(1+x)^\alpha \sim 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \ldots . \tag{1}$$

Этот ряд называется биномиальным, он играет большую роль в математике.

Найдём радиус сходимости ряда (1). Имеем

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\alpha\\ n+1\end{pmatrix}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(n+1)!}{n!\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(\alpha-n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1.$$

Итак, ряд сходится абсолютно при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Исследуем поведение остаточного члена формулы Маклорена при $|x| < 1$. Возьмём его в интегральной форме:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n dt =$$

$$= (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1} dt =$$

$$= (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1+x}{(1+t)^2}\frac{(1+t)^{\alpha+1}}{1+x} dt.$$

Рассмотрим теперь функцию $\phi(t) = \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1+x}{(1+t)^2}$. Эта функция на отрезке $[0; x]$ или $[x; 0]$ при $|x| < 1$ сохраняет свой знак. Покажем это. Так как $|x| < 1$, а следовательно и $|t| < 1$, то $\frac{1}{(1+t)^n}\frac{1+x}{(1+x)^2} > 0$ для всех t при любом n. Тогда знак функции зависит только от множителя $(x-t)^n$. Но при $0 \le t \le x \le 1$ разность $x - t \ge 0$, поэтому $(x-t)^n \ge 0$. Если же $-1 \le x \le t \le 0$, тогда $x - t \le 0$ и при n чётном $(x-t)^n \ge 0$, а при n нечётном $(x-t)^n \le 0$.

Применяя теорему о среднем для интеграла, получаем

$$R_n(x) = (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\frac{(1+\xi_n)^{\alpha+1}}{1+x}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1+x}{(1+t)^2} dt,$$

где ξ_n находится между 0 и x.

Вычислим последний интеграл. Для этого положим

$$\frac{x-t}{1+t} = y,\ dy = -\frac{1+x}{(1+t)^2}dt,\ y(0) = x,\ y(x) = 0,$$

$$\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{1+x}{(1+t)^2}dt = -\int_x^0 y^n dy = \int_0^x y^n dy = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Тогда

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1}\frac{(1+\xi_n)^{\alpha+1}}{1+x}x^{n+1}.$$

Так как $|x| < 1$, ξ_n находится между 0 и x, то $0 < \frac{(1+\xi_n)^{\alpha+1}}{1+x} \le M$ для всех n. Далее, $\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, так как $|x| < 1$.

Таким образом, $R_n(x) \to 0, n \to \infty$, если $|x| < 1$.

Получаем окончательный результат:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \ \dots, |x| < 1. \qquad (2)$$

Замечание. Дополнительные исследования показывают, что формула (2) имеет место при $x = 1$, если $\alpha > -1$, и при $x = -1$, если $\alpha > 0$.

Формулу (2) можно использовать для вычисления корней.

Пример

Вычислить $\sqrt[7]{130}$ с точностью до $\frac{1}{10^5}$.

$$\sqrt[7]{130} = \sqrt[7]{128+2} = \sqrt[7]{128\left(1+\frac{1}{64}\right)} = 2\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{7}} =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64} - \frac{3}{49}\cdot\frac{1}{64^2} + \ \dots\right).$$

Видим, что ряд знакочередующийся, поэтому, если мы ограничимся двумя членами ряда, то абсолютная ошибка с учётом округления

$$\Delta < 2\left(\frac{3}{49}\cdot\frac{1}{64^2}\right) < \frac{1}{10^5}.$$

Тогда $\sqrt[7]{130} \approx 2 + \frac{1}{7\cdot 32} \approx 2 + 0{,}004464 = 2{,}004464$. Окончательно

$$\sqrt[7]{130} \approx 2{,}00446\ \ (\pm 0{,}00001).$$

Замечание. Рассмотрим другой способ доказательства формулы (2).

Пусть показано, что

$$(1+x)^\alpha \sim 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \ \dots, |x|<1,$$

причём ряд в правой части сходится. Пусть

$$\phi(x) = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \ \dots, \ |x|<1. \qquad (3)$$

Найдём функцию $\phi(x)$.

Из (3) находим

$$\begin{cases} \phi'(x) = \binom{\alpha}{1} + 2\binom{\alpha}{2}x + \ \dots + n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} + \ \dots, \\ x\phi'(x) = x\binom{\alpha}{1} + 2\binom{\alpha}{2}x^2 + \ \dots + n\binom{\alpha}{n}x^n + \ \dots; \end{cases}$$

Складывая равенства, получим

$$(1+x)\phi'(x) = \binom{\alpha}{1} + \left[\binom{\alpha}{1} + 2\binom{\alpha}{2}\right]x + \left[2\binom{\alpha}{2} + 3\binom{\alpha}{3}\right]x^2 + \ \dots +$$
$$+ \left[n\binom{\alpha}{n} + (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\right]x^n + \ \dots.$$

Заметим, что

$$n\binom{\alpha}{n} + (n+1)\binom{\alpha}{n+1} =$$
$$= n\binom{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)+\ \dots+(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(n+1) =$$
$$= n\binom{\alpha}{n} + (\alpha - n)\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha}{n}.$$

Тогда

$$(1+x)\phi'(x) = \alpha + \alpha\binom{\alpha}{1}x + \alpha\binom{\alpha}{2}x^2 + \ \dots + \alpha\binom{\alpha}{n}x^n + \ \dots = \alpha\phi(x).$$

Из полученного дифференциального уравнения $(1+x)\phi'(x) = \alpha\phi(x)$ находим

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{\alpha}{1+x}; \quad \frac{d}{dx}\ln\phi(x) = \frac{\alpha}{1+x};$$
$$\ln\phi(x) = \alpha\ln(1+x) + c;$$
$$\phi(x) = (1+x)^\alpha \cdot e^c;$$
$$\phi(x) = c(1+x)^\alpha, \ c = const \in \mathbf{R}.$$

Положим в последнем равенстве $x = 0$: $1 = c \Rightarrow c = 1$. Таким образом, $\phi(x) = (1+x)^\alpha$, и равенство (3) принимает вид (2).

§ 6. Формула Стирлинга

Мы выведем важную формулу анализа, называемую формулой Стирлинга. Эта формула позволяет легко оценивать величину $n!$ при больших n. Формула имеет вид

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}},\ 0 < \theta_n < 1.$$

При рассмотрении вопроса о вычислении логарифмов мы получили

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \frac{1}{7(2n+1)^6} + \ \dots\right),$$

откуда

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \ \dots .$$

Это выражение больше единицы, но меньше $1 + \frac{1}{12n(n+1)}$.

Действительно,

$$1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \ \dots < 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{(2n+1)^6} + \ \dots\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{4n^2+4n+1-1} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Итак, имеем

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Потенцируя это неравенство, получаем

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}},$$

или

$$1 < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}. \qquad (1)$$

Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$.

Найдём отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)!e^{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}e} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{e}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что $a_n > a_{n+1}$, то есть $\{a_n\}$ – убывающая последовательность. Она ограничена снизу нулём. Тогда $\{a_n\}$ имеет предел, который обозначим через a. Из (3) видим, что

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

Видим, что последовательность $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ возрастающая. Она имеет пределом число a, так как $e^{-\frac{1}{12n}} \to 1$.

Итак, при любом n

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n.$$

Тогда существует такое θ_n, $0 < \theta_n < 1$, что

$$a = a_n e^{-\frac{\theta_n}{12n}}.$$

Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = a_n e^{-\frac{x}{12n}}$, $x \in [0,1]$, n – фиксированное. Так как $f(0) = a_n$ и $f(1) = a_n e^{-\frac{1}{12n}}$, а функция непрерывна, то по теореме Больцано – Коши она принимает на $[0;1]$ все значения, промежуточные между значениями на концах отрезка, и, в частности, значение, равное a. Кроме того, функция убывающая, поэтому найдётся единственное число θ_n, $0 < \theta_n < 1$, такое, что $f(\theta_n) = a$. Таким образом, $a = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\theta_n}{12n}}$, откуда

$$n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}},\ 0 < \theta_n < 1. \tag{4}$$

Остаётся определить константу a. Для этого используем формулу Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

Заметим, что

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

По формуле (4) имеем

$$(2n)! = a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}, 0 < \theta_{2n} < 1.$$

Тогда

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}\left(a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}\right)^2}{a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} a e^{\frac{4\theta_n - \theta_{2n}}{24n}},$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{n}{2} a^2 e^{\frac{4\theta_n - \theta_{2n}}{12n}} = \frac{a^2}{4},$$

откуда

$$a = \sqrt{2\pi}.$$

Подставляя значение a в равенство (4), получаем формулу Стирлинга.

ГЛАВА V. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Определение функций $e^z, \sin z, \cos z$. Формулы Эйлера

Мы получили ранее следующие формулы:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots. \tag{3}$$

Ряды (1), (2) и (3) сходятся абсолютно, приведённые формулы верны для всей числовой оси. Рассмотрим следующие ряды в комплексной плоскости:

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \tag{4}$$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \tag{5}$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^m\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots. \tag{6}$$

Эти ряды сходятся абсолютно на всей комплексной плоскости, что просто показывается с помощью признака Даламбера сходимости положительных рядов. Естественно обозначить суммы рядов (4), (5) и (6) через $e^z, \sin z, \cos z$ соответственно. Итак, по определению

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}, \tag{4}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \tag{5}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{6}$$

Функцию e^z называют показательной, а $\sin z$, $\cos z$ – тригонометрическими функциями комплексного переменного. Они определены на всей комплексной плоскости, то есть при всех $z \in \boldsymbol{C}$.

Между функциями e^z, $\sin z$, $\cos z$ существует тесная связь. Заменим в ряде (4) z на iz, где z – произвольное, получим

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \ \dots =$$
$$= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} + \ \dots =$$
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ \dots\right) =$$
$$= \cos z + i \sin z.$$

Мы использовали свойства сложения рядов и умножения ряда на число. Итак,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{7}$$

Заменим в этой формуле z на $-z$, получим

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{8}$$

Мы использовали равенства

$$\cos(-z) = \cos z, \qquad \sin(-z) = -\sin z,$$

которые очевидным образом следуют из (4), (5) и (6). Из формул (7) и (8) немедленно получаем

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{9}$$

Формулы (7), (8) и (9) называют формулами Эйлера.

Замечание. Пусть z – комплексное число, $r = |z|$, $\phi = \operatorname{Arg} z$ – аргумент z. Тогда z можно записать в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z).$$

Если использовать формулу (7), то получим

$$z = re^{i\phi} = |z|e^{i\operatorname{Arg}(z)}.$$

Это так называемая показательная форма комплексного числа.

§ 2. Свойства показательной функции

1. Основное свойство показательной функции

Известно, что $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$, где x_1 и x_2 – действительные числа. Покажем, что это основное свойство показательной функции верно и в комплексной плоскости. Пусть

$$e^{z_1} = 1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \ \dots + \frac{z_1^n}{n!} + \ \dots,$$
$$e^{z_2} = 1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \ \dots + \frac{z_2^n}{n!} + \ \dots .$$

Написанные ряды сходятся абсолютно, поэтому по теореме умножения рядов их можно перемножить.

Напомним формулу умножения рядов (по Коши)

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots)(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n + \dots) =$$
$$= \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1) + \dots +$$
$$+(\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \dots + \alpha_k\beta_{n-k+1} + \dots + \alpha_n\beta_1) + \dots .$$

В нашем случае

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = 1 + (z_1 + z_2) + \left(\frac{z_1^2}{2!} + z_1 z_2 + \frac{z_2^2}{2!}\right) + \dots +$$
$$+\left(\frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\frac{z_2}{1!} + \frac{z_1^{n-2}}{(n-2)!}\frac{z_2^2}{2!} + \dots + \frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!}\frac{z_2^k}{k!} + \dots + \frac{z_2^n}{n!}\right) + \dots .$$

Преобразуем общий член полученного ряда следующим образом:

$$\frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\frac{z_2}{1!} + \frac{z_1^{n-2}}{(n-2)!}\frac{z_2^2}{2!} + \dots + \frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!}\frac{z_2^k}{k!} + \dots + \frac{z_2^n}{n!} =$$
$$= \frac{1}{n!}\left(z_1^n + \frac{n!}{(n-1)!1!} z_1^{n-1} z_2 + \frac{n!}{(n-2)!2!} z_1^{n-2} z_2^2 + \dots +\right.$$
$$\left. + \frac{n!}{(n-k)!k!} z_1^{n-k} z_2^k + \dots + z_2^n\right) = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!},$$

так как $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Окончательно имеем

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = 1 + \frac{z_1+z_2}{1!} + \frac{(z_1+z_2)^2}{2!} + \dots + \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} + \dots = e^{z_1+z_2}.$$

Замечание. Используя доказанное свойство, можно получить выражение e^z через действительные функции. Если $z = x + iy$, то $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Окончательно

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),\ z = x + iy\,.$$

Это выражение можно рассматривать как тригонометрическую форму e^z. Тогда $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y$. Заметим, что $e^z \neq 0$ для всех z, так как $e^x \neq 0$ для всех x.

2. Производная функции e^z

Так как e^z есть сумма степенного ряда, то её можно почленно дифференцировать. Тогда

$$(e^z)' = 1 + \frac{2z}{2!} + \frac{3z^2}{3!} + \dots + \frac{nz^{n-1}}{n!} + \dots = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = e^z.$$

Итак, $(e^z)' = e^z$. А тогда $(e^z)^{(n)} = e^z$.

3) Периодичность функции e^z

Функция комплексного переменного $f(z)$ называется периодической, если существует число $\omega \neq 0$ такое, что для всех z из области существования функции будет верно равенство $f(z+\omega) = f(z-\omega) = f(z)$. Естественно, при этом предполагается, что точки $z \pm \omega$ при любом z входят в область существования функции.

Исследуем на периодичность e^z. Допустим, что $\omega \neq 0$ – период функции. Тогда

$$e^{z+\omega} = e^z \text{ для всех } z.$$

Отсюда $e^\omega = 1$, так как $e^{z+\omega} = e^z \cdot e^\omega = e^z$ и $e^z \neq 0$. Таким образом, все периоды функции, если они есть, удовлетворяют уравнению $e^\omega = 1$. Решим его.

Пусть $\omega = \alpha + i\beta$. Тогда $e^\omega = e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta) = 1$. Так как $e^\omega = 1$, то $|e^\omega| = e^\alpha = 1$, откуда $\alpha = 0$. Тогда $\cos\beta + i\sin\beta = 1$, откуда

$$\cos\beta = 1, \beta = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Итак, при $k = 0$ имеем $\omega = \alpha + i\beta = 0$; при $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ число $\omega = \alpha + i\beta$ отлично от нуля. Числа $\omega = 2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ являются периодами функции e^z, число $2\pi i$ называют её основным периодом, $e^{2\pi k i} = 1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Замечание. Ясно, что периодами функции e^{iz} являются числа $2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

§ 3. Свойства тригонометрических функций

1. Формулы тригонометрии

Покажем, что для $\sin z$ и $\cos z$ верны так называемые теоремы сложения, которые верны на действительной оси.

Применяя формулу Эйлера, запишем

$$\cos(z_1 + z_2) + i\sin(z_1 + z_2) = e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} =$$
$$= (\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2).$$

Выполняя умножение, получаем

$$\cos(z_1 + z_2) + i\sin(z_1 + z_2) =$$
$$= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \qquad (1)$$

Равенство (1) верно для любых z_1 и z_2. Заменим в равенстве z_1 на $-z_1$ и z_2 на $-z_2$. Используя нечётность функции $\sin z$ и чётность $\cos z$, имеем

$$\cos(z_1 + z_2) - i\sin(z_1 + z_2) =$$
$$= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) - i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \qquad (2)$$

Складывая и вычитая (1) и (2), получаем:

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \qquad (3)$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2. \qquad (4)$$

Эти формулы и выражают теоремы сложения. Из формул (3) и (4) получаются, как и в действительной тригонометрии, все формулы тригонометрии, в которых участвуют синус и косинус. Получим некоторые из них.

Полагая в (3) и (4) $z_1 = z$ и $z_2 = \frac{\pi}{2}$, имеем

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \cos\frac{\pi}{2} - \sin z \sin\frac{\pi}{2} = -\sin z,$$
$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin z \cos\frac{\pi}{2} + \cos z \sin\frac{\pi}{2} = \cos z.$$

При $z_1 = z$ и $z_2 = \pi$ из (3) и (4) следует

$$\cos(z + \pi) = -\cos z, \quad \sin(z + \pi) = -\sin z.$$

Мы вывели некоторые формулы приведения. Ясно, что они верны и в общем случае.

Положив в (3) и (4) $z_1 = z_2 = z$, получим формулы двойного аргумента

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \sin 2z = 2\sin z \cos z.$$

Если в (3) положить $z_1 = -z_2 = z$, то получим основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Последнее соотношение наводит на мысль, что, как и на действительной оси, функции $\sin z$ и $\cos z$ ограничены единицей. Но это не так. Нам известно, что

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Положим здесь $z = -iy$, где $y \in \mathbf{R}_+$. Имеем

$$|\sin i\, y| = \left|\frac{e^{y} - e^{-y}}{2i}\right| = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \to +\infty \text{ при } y \to +\infty,$$
$$\cos iy = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \to +\infty \text{ при } y \to +\infty.$$

Таким образом, $\sin z$ и $\cos z$ – неограниченные на комплексной плоскости функции.

2. Периоды функций $\mathbf{\sin z}$ **и** $\mathbf{\cos z}$

Исследуем на периодичность функции $\sin z$ и $\cos z$. Пусть ω является периодом функции $\sin z$, то есть

$$\sin(z+\omega) = \sin z \text{ для всех } z.$$

Тогда ω является периодом функции $\cos z$. Действительно,

$$\cos(z+\omega) = \sin\left(z+\omega+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z.$$

Таким образом, $\sin z$ и $\cos z$ имеют одно и то же множество периодов. Найдём теперь это множество.

Пусть ω – период функций $\sin z$ и $\cos z$. Заметим, что

$$e^{i(z+\omega)} = \cos(z+\omega) + i\sin(z+\omega) = \cos z + i\sin z = e^{iz}.$$

Последнее означает, что ω есть период функции e^{iz}. Итак, мы показали, что все периоды $\sin z$ и $\cos z$ являются периодами функции e^{iz}. Но периодами функции e^{iz} являются числа $2k\pi$, $k = \pm1, \pm2, \dots$. Остаётся показать, что все эти числа являются периодами функции $\sin z$. По формуле сложения находим

$$\sin(z+2k\pi) = \sin z\cos 2k\pi + \cos z\sin 2k\pi = \sin z.$$

Итак, все периоды $\sin z$ и $\cos z$ исчерпываются числами $2k\pi$, $k = \pm1, \pm2, \dots$.

3. Производные функций $\mathbf{\sin z}$ **и** $\mathbf{\cos z}$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots .$$

Дифференцируя эти степенные ряды, получим

$$(\sin z)' = 1 - \frac{3z^2}{3!} + \frac{5z^4}{5!} - \frac{7z^6}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)z^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots =$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots = \cos z,$$

$$(\cos z)' = -\frac{2z}{2!} + \frac{4z^3}{4!} - \frac{6z^5}{6!} + \dots + (-1)^n\frac{2nz^{2n-1}}{(2n)!} + \dots =$$

$$= -\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots\right) = -\sin z.$$

Итак, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$.

Ясно, что $\sin z$ и $\cos z$ имеют производные всех порядков.

Замечание 1. Мы определили $\sin z$ и $\cos z$ как суммы степенных рядов. В школьном курсе функции $\sin x$ и $\cos x$ определяются из геометрических соображений. Можно построить аналитическую теорию тригонометрических функций, определив $\sin x$ и $\cos x$ для $x \in \mathbf{R}$ как суммы аналогичных рядов.

Замечание 2. Через определенные функции e^z, $\sin x$ и $\cos x$ определяются функции

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$
$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Последние называются гиперболическими косинусом, синусом, тангенсом и котангенсом соответственно.

Задачи к главам II–V

1. Исследуйте сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$ при различных значениях параметров p и q, если известно, что $q > 0$ и $0 < x < \pi$.

Решение. В силу необходимого условия сходимости ряда его общий член $\frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$ должен стремиться к нулю при $n \to +\infty$. Это будет так, если $\frac{n^p}{1+n^q} = \frac{1}{n^{q-p}}\frac{1}{1+n^{-q}} \to 0$ при $n \to +\infty$. Так как $q > 0$, то $\frac{1}{1+n^{-q}} \to 1$ при $n \to +\infty$. Таким образом, $\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}}$ при $n \to +\infty$ и $\frac{n^p}{1+n^q}$ будет стремиться к 0 при $n \to +\infty$, если $\frac{1}{n^{q-p}} \to 0$ при $n \to +\infty$. Последний факт имеет место при $q - p > 0$.

Итак, $q - p > 0$ – необходимое условие сходимости ряда.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Заметим, что

1. $\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{n^p \sin nx}{1+n^q}\right| = \sum_{n=1}^{N}\frac{n^p}{1+n^q}|\sin n\,x| \geq \sum_{n=1}^{N}\frac{n^p}{1+n^q}\sin^2 n\,x =$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{n^p}{1+n^q}(1-\cos 2nx) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{n^p}{1+n^q} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{n^p}{1+n^q}\cos 2nx\ .$$

2. Так как $\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}}$ при $n \to +\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^p}{1+n^q}$ расходится при $q - p \leq 1$. Тогда для его частных сумм выполнено

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{n^p}{1+n^q} = \infty.$$

3. Так как $\frac{n^p}{1+n^q} \to 0$ при $n \to +\infty$, а

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos 2nx\right| = \left|\frac{\sin Nx\cos(N+1)x}{\sin x}\right| \leq \frac{1}{|\sin x|}\,,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^p}{1+n^q}\cos 2nx$ сходится по признаку Дирихле. Тогда существует конечный предел его частных сумм $\sum_{n=1}^{N}\frac{n^p}{1+n^q}\cos 2nx$.

Из пунктов 1–3 следует, что последовательность $\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{n^p \sin nx}{1+n^q}\right|$ частных сумм ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{n^p \sin nx}{1+n^q}\right|$ не имеет предела, то есть ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{n^p \sin nx}{1+n^q}\right|$ расходится при $q - p \leq 1$.

Тогда абсолютной сходимости исходного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$ при $q-p\le 1$ нет.

Далее, так как $\left|\frac{n^p \sin nx}{1+n^q}\right| \le \frac{n^p}{1+n^q}$, $\frac{n^p}{1+n^q}\sim\frac{1}{n^{q-p}}$ при $n\to+\infty$, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{q-p}}$ сходится при $q-p>1$, то исходный ряд сходится абсолютно при $q-p>1$.

Докажем, что ряд сходится условно при $0<q-p\le 1$. Действительно, заметим, что

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^p \sin nx}{1+n^q}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^{q-p}}\frac{1}{1+n^{-q}}$.
2. Последовательность $\frac{1}{1+n^{-q}}$ монотонно стремится к единице.
3. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^{q-p}}$ сходится при $q-p>0$ в силу признака Дирихле.

Из 1–3 следует, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^{q-p}}\frac{1}{1+n^{-q}}$ сходится при $q-p>0$ согласно признаку Абеля. Значит, исходный ряд сходится условно при $0<q-p\le 1$.

Ответ: ряд сходится условно при $0<q-p\le 1$ и абсолютно при $q-p>1$.

2. Исследуйте сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$ при различных значениях параметра p.

Решение. ОДЗ: $\forall n\in \boldsymbol{N}(x+n>0)$, то есть $x>-1$.

Фиксируем $x>-1$.

Если $p<0$, то $\left|\frac{(-1)^n}{(x+n)^p}\right|=(x+n)^{-p}\to+\infty$ при $n\to\infty$ и, значит, ряд расходится. Аналогично, если $p=0$, то $\left|\frac{(-1)^n}{(x+n)^0}\right|=1\to 1$ при $n\to\infty$ и ряд расходится. (При $p\le 0$ не выполняется необходимое условие сходимости ряда.)

Пусть $p>0$. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$ – знакочередующийся ряд. Так как $p>0$, то последовательность $\frac{1}{(x+n)^p}$ монотонно стремится к нулю при $n\to\infty$. Тогда знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^p}$ сравним с рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$. Так как последний ряд сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$, то $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$ сходится абсолютно при $p>1$ и сходится условно при $0<p\le 1$.

Ответ: на интервале $(-1;+\infty)$ ряд сходится условно при $0<p\le 1$ и абсолютно – при $p>1$.

3. Исследуйте сходимость ряда Ламберта $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$.

Решение. ОДЗ: $x\ne\pm 1$. Попытаемся воспользоваться признаком Коши. Докажем, что $K=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right|}=\begin{cases}|x|,\text{при}|x|<1,\\ 1,\text{при}|x|>1\end{cases}$.

Пусть фиксирован x, удовлетворяющий условию $|x|<1$, тогда, начиная с некоторого номера, выполняется двойное неравенство $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}<\sqrt[n]{1-x^n}<\sqrt[n]{2}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, то по теореме о пределе промежуточной последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-x^n}=1$. Таким образом, при $|x|<1$ величина $K=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|1-x^n|}}=|x|<1$ и ряд Ламберта сходится абсолютно.

Фиксируем x, удовлетворяющий условию $|x|>1$. $K=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right|}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{|x^{-n}-1|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1-x^{-n}}}=1$. Видим, что в этом случае признак Коши не даёт ответа на вопрос о сходимости ряда. Однако заметим, что в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-x^{-n}}=1$. Так как общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

Ответ: ряд сходится абсолютно на интервале $(-1;1)$.

4. Найдите область сходимости ряда:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)3^n}{(x-2)^n n^3}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(3-x^2)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^n x}{n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{2n-2}}$.

Решение. 1. Фиксируем $x \neq 2$ и воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)3^{n+1}}{|x-2|^{n+1}(n+1)^3} : \frac{(n+1)3^n}{|x-2|^n n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)3^{n+1}|x-2|^n n^3}{(n+1)3^n|x-2|^{n+1}(n+1)^3} = \frac{3}{|x-2|}.$$

Ряд сходится, причём абсолютно, если $\frac{3}{|x-2|} < 1$. Откуда $|x-2| > 3$ и, значит, $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

Ряд не сходится абсолютно при $\frac{3}{|x-2|} > 1$. Заметим, что в этом случае общий член ряда не стремится к нулю. Таким образом, в силу необходимого признака сходимости ряда ряд расходится, если $\frac{3}{|x-2|} > 1$, то есть при $x \in (-1; 5)$.

Остаётся рассмотреть точки $x = 5$ и $x = -1$.

Пусть $x = 5$. Ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)3^n}{3^n n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3}$. Поскольку $\frac{n+1}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то положительный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3}$ сходится, причём абсолютно, в силу признака сравнения.

Пусть $x = -1$. Ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)3^n}{(-3)^n n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n^3}$. Это знакочередующийся ряд. Исследуя его на абсолютную сходимость, получим ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n(n+1)}{n^3}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3}$, который сходится. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Ответ: область сходимости ряда $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$; ряд сходится абсолютно на $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

2. Фиксируем $x \in \mathbf{R}$ и воспользуемся признаком Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(3-x^2)^n|} = |3-x^2| = |x^2-3|.$$

Ряд сходится абсолютно при $|x^2-3| < 1$. Решим данное неравенство:

$$-1 < x^2 - 3 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-2; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};\ 2\right).$$

Кроме того, ряд расходится, если $|x^2-3| > 1$, то есть при $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

При $x = \pm\sqrt{2}$ получим ряд $1 + 1 + 1 + \ \dots$, который расходится, так как общий член не стремится к нулю.

Аналогично, при $x = \pm 2$ получаем расходящийся ряд $-1 + 1 - 1 + 1 - \ \dots$.

Ответ: область сходимости ряда $(-2; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ 2)$; ряд сходится абсолютно на $(-2; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ 2)$.

3. Члены ряда определены для всех $x \in \mathbf{R}\backslash\{-1\}$. Заметим, что при $x = 1$ ряд состоит из нулей, следовательно, сходится абсолютно и его сумма равна 0.

Фиксируем $x \neq \pm 1$ и исследуем на абсолютную сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ с помощью признака Даламбера.

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \left(\frac{1}{2n+1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{n+1}\right) : \left(\frac{1}{2n-1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{n}\right) = \frac{2n-1}{2n+1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$.

Для тех значений x, при которых $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1$, рассматриваемый ряд сходится абсолютно. Для значений x, при которых $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| > 1$, ряд расходится.

Равенство $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = 1$ выполняется только при $x = 0$.

Решим неравенство $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1$. Это неравенство равносильно следующему: $|1-x| < |1+x| \Leftrightarrow (1-x)^2 < (1+x)^2 \Leftrightarrow x > 0$.

Таким образом, ряд сходится абсолютно на множестве $(0; +\infty)$. Ряд расходится на множестве $(-\infty; 0)$.

При $x = 0$ исходный ряд принимает вид $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n-1} + \ \dots$, сходится условно по признаку Лейбница.

Ответ: область сходимости ряда $[0; +\infty)$; на интервале $(0; +\infty)$ ряд сходится абсолютно, при $x = 0$ ряд сходится условно.

4. Пусть $x \neq 0$, тогда применяем признак Даламбера.

Заметим, что

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1+x^{2n+2}} : \frac{|x|^n}{1+x^{2n}} = |x|\,\frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} = \begin{cases}|x|, 0<|x|<1,\\ 1, |x|=1,\\ \frac{1}{|x|}, |x|>1.\end{cases}$$

Видим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| < 1$ и при $0<|x|<1$ и при $|x|>1$, значит, ряд сходится абсолютно при $x \neq \pm 1, x \neq 0$. Заметим, что при $x=0$ признак Даламбера не применим, однако в этом случае ряд состоит из нулей и тем самым его абсолютная сходимость очевидна.

При $x=\pm 1$ общий член ряда по абсолютной величине равен $\frac{1}{2}$, потому ряд расходится.

Ответ: область сходимости ряда $\mathbf{R}\backslash\{\pm 1\}$; ряд сходится абсолютно на $\mathbf{R}\backslash\{\pm 1\}$.

5. Члены ряда определены для $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$. При $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, используем признак Коши:

$$K = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\operatorname{tg}^n x}{n}\right|}\,|\operatorname{tg} x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = |\operatorname{tg} x|.$$

Тогда ряд сходится абсолютно на интервалах $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right), n \in \boldsymbol{Z}$; расходится на интервалах $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right), n \in \boldsymbol{Z}$. При $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ и сходится условно; при $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$, ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и расходится.

Ответ: область сходимости ряда $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right), n \in \boldsymbol{Z}$; ряд сходится абсолютно на $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right), n \in \boldsymbol{Z}$, при $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$, ряд сходится условно.

6) ОДЗ: $\frac{x}{2^{2n-2}} \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $n \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то есть $x \neq 2^{2n-3}(2k+1)\pi$, $n \in \boldsymbol{N}, k \in \boldsymbol{Z}$.

При $x=0$ ряд состоит из нулей и, значит, сходится абсолютно. Для всех $x \neq 0$, для которых ряд определен, начиная с некоторого номера n_0, аргумент $\frac{x}{2^{2n-2}}$ принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Для этих значений n имеем: $|f_n(x)| = 2^{n-1}\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2^{2n-2}}\right| \sim \frac{|x|}{2^{n-1}}$ при $n\to\infty$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{2n-2}}$ сходится вместе с геометрической прогрессией $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}}$. Следовательно, рассматриваемый ряд сходится абсолютно во всех точках ОДЗ.

Ответ: сходится абсолютно во всех точках $x \neq 2^{2n-3}(2k+1)\pi$, $n\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{Z}$.

5. Найдите область сходимости функционального ряда:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-4n+5}{3^n(n+1)}(3x-1)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(3x+1)^n}{2^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{3^n(x-3)^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(2x+3)^n}{n^2+1}$; 5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(2x-1)^n}{n^3}$; 6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n(x-1)^n}$;

7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-6}{6^n}(x-6)^n$; 8) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+3}{n^3+1}(2x+1)^n$; 9) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{(x-5)^{2n}}$;

10) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$; 11) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+2}{4^n}(2x+3)^n$; 12) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(3x)^{2n}}{\ln(2n+1)}$;

13) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n(n+1)(3x-1)^n}$; 14) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln(3n-4)}{2^n(x-4)^n}$; 15) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(5x)^{2n}10^n}{\ln(3n+1)}$.

Ответы:

1) область сходимости $\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$; сходится абсолютно на $\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$;

2) область сходимости $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$; сходится абсолютно на $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$;

3) область сходимости $\left(-\infty;2\frac{2}{3}\right)\cup\left(3\frac{1}{3};+\infty\right)$; сходится абсолютно на $\left(-\infty;2\frac{2}{3}\right)\cup\left(3\frac{1}{3};+\infty\right)$;

4) область сходимости $[-2;-1)$; сходится абсолютно на $(-2;-1)$, в точке $x=-2$ сходится условно;

5) область сходимости $\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$; сходится абсолютно на $\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$;

6) область сходимости $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(1\frac{1}{2};+\infty\right)$; сходится абсолютно на $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(1\frac{1}{2};+\infty\right)$;

7) область сходимости $(0;12)$; сходится абсолютно на $(0;12)$;

8) область сходимости $[-1;0]$; сходится абсолютно на $[-1;0]$;

9) область сходимости $(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$; сходится абсолютно на $(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$;

10) область сходимости $[0; 1)$; сходится абсолютно на $(0; 1)$, в точке $x = 0$ сходится условно;

11) область сходимости $\left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$; сходится абсолютно на $\left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

12) область сходимости $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; сходится абсолютно на $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$;

13) область сходимости $(-\infty; 0] \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; сходится абсолютно на $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, в точке $x = 0$ сходится условно;

14) область сходимости $\left(-\infty; 3\frac{1}{2}\right) \cup \left(4\frac{1}{2}; +\infty\right)$; сходится абсолютно на $\left(-\infty; 3\frac{1}{2}\right) \cup \left(4\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

15) область сходимости $\left(-\frac{1}{5\sqrt{10}}; \frac{1}{5\sqrt{10}}\right)$; сходится абсолютно на $\left(-\frac{1}{5\sqrt{10}}; \frac{1}{5\sqrt{10}}\right)$.

6. Найдите область сходимости функционального ряда:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{x^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x-1)^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} (x^{2n} \cos \pi n)$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)x^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$; 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\cos 2x)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\sqrt{x}}$; 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{n}$; 9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2+1}$;

10) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin 2x)^n$; 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\sqrt{x}}$; 12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2 \frac{x}{n}$;

13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$; 14) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin x)^n$; 15) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln x)^n$.

Ответы:

1) область сходимости $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; сходится абсолютно на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;

2) область сходимости $(-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$; сходится абсолютно на $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, в точке $x = 0$ сходится условно;

3) область сходимости $(-1; 1)$; сходится абсолютно на $(-1; 1)$;

4) область сходимости $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$; сходится абсолютно на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, в точке $x = -1$ сходится условно;

5) область сходимости $\mathbf{R}$; сходится абсолютно на $\mathbf{R}$;

6) область сходимости $\mathbf{R}\backslash\{\pi k, k \in \mathbf{Z}\}$; сходится абсолютно на $\mathbf{R}/\{\pi k, k \in \mathbf{Z}\}$;

7) область сходимости $(1; +\infty)$; сходится абсолютно на $(1; +\infty)$;

8) область сходимости $\mathbf{R}\backslash\left\{\frac{\pi n(2k+1)}{2}, k \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{Z}\right\}$; сходится абсолютно на $\mathbf{R}\backslash\left\{\frac{\pi n(2k+1)}{2}, k \in \mathbf{N}\ n \in \mathbf{Z}\right\}$;

9) область сходимости $\mathbf{R}$; сходится абсолютно на $\mathbf{R}$;

10) область сходимости $\mathbf{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$; сходится абсолютно на $\mathbf{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$;

11) область сходимости $(0; +\infty)$; сходится абсолютно на $(0; +\infty)$;

12) область сходимости $\mathbf{R}$; сходится абсолютно на $\mathbf{R}$;

13) область сходимости $(-2; 2)$; сходится абсолютно на $(-2; 2)$;

14) область сходимости $\mathbf{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}\right\}$; сходится абсолютно на $\mathbf{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}\right\}$;

15) область сходимости $\left(\frac{1}{e}; e\right)$; сходится абсолютно на $\left(\frac{1}{e}; e\right)$.

7. Найдите предельную функцию для последовательности $\{f_n(x)\}$:

1) $f_n(x) = \cos\left(\pi\sqrt{4n^2 + nx}\right)$; 2) $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \cos^m(n!\,2\pi x)$;

3) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^{2n} + 4x^n + 3}$; 4) $f_n(x) = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}$.

Решение. 1. Члены последовательности определены, если для любого натурального n выполняется неравенство $4n^2 + nx$, то есть $x \geq -4n$ для любого натурального n. Таким образом, область существования функциональной последовательности $x \geq -4$.

Заметим, что

$$f_n(x) = \cos\left(\pi\sqrt{4n^2 + nx}\right) = \cos\left(\pi\sqrt{4n^2 + nx} - 2\pi n\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi n\left(\sqrt{1+\frac{x}{4n}}-1\right)\right) = \cos\left(2\pi n\frac{\frac{x}{4n}}{\sqrt{1+\frac{x}{4n}}+1}\right) = \cos\frac{\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{1+\frac{x}{4n}}+1}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$, $x \in [-4; +\infty)$.

2. Члены последовательности определены для $x \in \mathbf{R}$. Пусть $x \in \mathbf{Q}$ (рациональное число). Тогда, начиная с некоторого номера, все числа $n!\,x$ будут являться целыми, и каждое значение $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \cos^m(n!\,2\pi x) = \lim\limits_{m\to\infty} \cos^m 0 = 1$.

Пусть $x \in \mathbf{I}$ (иррациональное число). Тогда при каждом фиксированном значении n число $n!\,x \in \mathbf{I}$ и, следовательно, $|cos(n!\,2\pi x)| < 1$. Тогда $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \cos^m(n!\,2\pi x) = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbf{I}. \end{cases}$

3. Члены последовательности определены, когда существуют корни чётной степени $n = 2k, k \in \mathbf{N}$, то есть при $x^{2n} + 4x^n + 3 = (x^n + 1)(x^n + 1) > 0$. Последнее неравенство справедливо при всех $x \in \mathbf{R}$, поэтому функциональная последовательность определена на $\mathbf{R}$.

Пусть $|x| < 1$, тогда $x^{2n} + 4x^n + 3 \to 3$ при $n \to \infty$ и, следовательно, начиная с некоторого номера $x^{2n} + 4x^n + 3 \geq 1$. Поэтому для тех же номеров $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{x^{2n} + 4x^n + 3} \leq \sqrt[n]{8}$. Воспользовавшись теоремой о пределе промежуточной последовательности, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{2n} + 4x^n + 3} = 1$.

Пусть $|x| > 1$, тогда $\sqrt[n]{x^{2n} + 4x^n + 3} = \sqrt[n]{x^{2n}(1 + 4x^{-n} + 3x^{-2n})} = x^2\sqrt[n]{1 + 4x^{-n} + 3x^{-2n}} \to x^2$ при $n \to \infty$.

Если $x = -1$, то $f_n(-1) = \sqrt[n]{4 + 4(-1)^n}$; $f_{2k}(-1) = \sqrt[2k]{8} \to 1$, $f_{2k+1}(-1) = 0 \to 0$ при $n \to \infty$. То есть последовательность $\{f_n(-1)\}$ не имеет предела.

Если $x = 1$, то $f_n(1) = \sqrt[n]{8} \to 1$ при $n \to \infty$.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (-1; 1], \\ x^2 & \text{при } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \end{cases}$

4. Если $x = 0$, то $f_n(0) = 1 \to 1$ при $n \to \infty$.

Пусть $x \neq 0$. Фиксируем $x \in \boldsymbol{R} \backslash \{\boldsymbol{0}\}$. При всех достаточно больших n угол $\left|\frac{x}{2^n}\right| \in (0; \pi)$, значит $\sin \frac{x}{2^n} \neq 0$. Тогда для таких n

$$f_n(x) = \frac{2^n\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} =$$

$$= \frac{2^{n-1}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\right)\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \ldots = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} \to \frac{\sin x}{x} \text{ при } n \to \infty.$$

Вывод: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = 0, \\ \frac{\sin x}{x} \text{ при } x \neq 0. \end{cases}$

8. Докажите, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве *E*:

1) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^{5/7}}$, $E = \boldsymbol{R}$; 2) $f_n(x) = x^n$, $E = \left[0; \frac{1}{2}\right]$;

3) $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$, $E = (-1+\varepsilon; 1-\varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < 1$.

Решение. 1. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n^{5/7}} = 0$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Докажем, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \equiv 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, при $n \to \infty$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное. Рассмотрим неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, где $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n^{5/7}} - 0\right| = \frac{|\sin nx|}{n^{5/7}} \leq \frac{1}{n^{5/7}}$. Так как $\frac{1}{n^{5/7}} < \varepsilon$ при всех $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon^{7/5}}\right]$, то $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $n > N$ и любых $x \in \boldsymbol{R}$. Это и означает, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \equiv 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, при $n \to \infty$.

2. Пусть $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ фиксирован, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Так как $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| \leq \frac{1}{2^n}$, то $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $n > N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right]$ и любых $x \in E$.

Получаем, что последовательность сходится равномерно на множестве $E = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

3. Найдём предельную функцию. Имеем $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = 0$, так как $x \in (-1; 1)$. Тогда

$$\sup_{x\in(-1+\varepsilon;1-\varepsilon)}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in(-1+\varepsilon;1-\varepsilon)}\frac{|x|^n}{1-x^n} = \frac{(1-\varepsilon)^n}{1-(1-\varepsilon)^n},$$

значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-1;1)}|f_n(x)-f(x)| = 0$ и последовательность сходится равномерно на множестве E.

9. Докажите, что функциональная последовательность не сходится равномерно на множестве E.

1) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $E = [0;+\infty)$; 2) $f_n(x) = x^n$, $E = [0;1)$;

3) $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$, $E = (-1;1)$.

Решение. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2nx}{1+n^2x^2} = 0$, $x \in E$, при $n \to \infty$. Найдём наибольшее значение величины $|f_n(x)-f(x)| = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$.

$$\left(\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right)' = 2n\frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 2n\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = -2n^3\frac{(x-1/n)(x+1/n)}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Тогда функция $y = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ на множестве $E = [0;+\infty)$ имеет единственную точку максимума $x = \frac{1}{n}$ и $y\left(\frac{1}{n}\right)_{max}$. Таким образом, например, для $\varepsilon = 1$ не найдётся номера N такого, чтобы неравенство $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ выполнялось при всех $n > N$ и любых $x \in E$, то есть равномерной сходимости последовательности нет.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Из равенства $\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in[0;1)} x^n = 1$ следует, для любого натурального n найдётся значение $x \in [0;1)$ такое, что $|f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon = \frac{1}{2}$. Следовательно, последовательность $f_n(x) = x^n$ сходится на $E = [0;1)$ неравномерно.

3. Предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-x^n} = 0$, $x \in (-1;1)$. Тогда $\sup\limits_{x\in(-1;1)}|f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in(-1;1)}\frac{|x|^n}{1-x^n} = +\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-1;1)}|f_n(x)-f(x)| = +\infty \neq 0,$$

следовательно, равномерной сходимости нет.

10. Исследуйте на равномерную сходимость функциональную последовательность на заданном множестве E:

1) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, E = [0; 1]$; 2) $f_n(x) = x^n - x^{2n}, E = [0; 1]$.

Решение. 1. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(x^n - x^{n+1}) = 0$ при каждом $x \in [0; 1]$. Таким образом, $f(x) \equiv 0$, $x \in [0; 1]$ – предельная функция.

Далее,

$$\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0;1]}(x^n - x^{n+1}) = (x^n - x^{n+1})|_{x=\frac{n}{n+1}} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{1}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{e} \cdot 0 = 0.$$

Тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \equiv 0, x \in [0; 1]$, при $n \to \infty$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(x^n - x^{2n}) = 0$ при каждом $x \in [0; 1]$.

$$\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0;1]}(x^n - x^{2n}) = (x^n - x^{2n})|_{x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} = \frac{1}{4}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4} \neq 0$, и $f_n(x)$ стремится к $f(x) \equiv 0$ неравномерно на отрезке $[0; 1]$.

11. Докажите, что заданный ряд сходится равномерно на заданном множестве E:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $E = \boldsymbol{R}$;

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, $E = [-1+\varepsilon; 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon = \text{const} \in (0;1)$;

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n + x^2}$, $E = \boldsymbol{R}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$, $E = [-\delta; \delta]$, $0 < \delta < 1$.

Решение. 1. Воспользуемся признаком Вейерштрасса равномерной сходимости рядов. Данный ряд сходится равномерно на всей числовой оси, так как $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ для всех n и любого x, а положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (функциональный ряд на множестве E мажорируется сходящимся числовым рядом, следовательно, сходится равномерно на этом множестве).

2. Снова воспользуемся признаком Вейерштрасса. Так как $\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| = \frac{|x|^n}{1-x^n} \le \frac{(1-\varepsilon)^n}{1-(1-\varepsilon)^n}$ для всех n и любого $x \in [-1+\varepsilon; 1-\varepsilon]$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ на множестве $E = [-1+\varepsilon; 1-\varepsilon]$ мажорируется положительным числовым рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\varepsilon)^n}{1-(1-\varepsilon)^n}$.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\varepsilon)^n}{1-(1-\varepsilon)^n}$ сходится, так как его общий член при $n \to \infty$ эквивалентен общему члену сходящегося положительного числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-\varepsilon)^n$. Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ – сходится равномерно на множестве $[-1+\varepsilon; 1-\varepsilon]$.

3. Ряд сходится равномерно на всей числовой оси, так как $\frac{1}{n^n+x^2} \le \frac{1}{n^n}$ для всех n и любого x, а положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ сходится. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ устанавливается с помощью признака Коши, действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

4. Так как $|x^n| < \delta^n$ для всех n и любого $x \in E$, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \delta^n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ сходится равномерно на множестве $[-\delta; \delta]$, где $0 < \delta < 1$.

12. Докажите, что заданный ряд не сходится равномерно на заданном множестве:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, $E = (-1; 1)$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $E = [0; +\infty)$.

Решение. 1. Если ряд сходится равномерно на некотором множестве, то его общий член стремится равномерно к нулю на этом множестве (необходимое условие равномерной сходимости ряда). Выше было доказано, что функциональная последовательность $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$ не сходится к $f(x) = 0$ равномерно на множестве $E = (-1; 1)$. Тогда равномерной сходимости ряда нет.

2. Выше было доказано, что функциональная последовательность $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ не сходится к нулю равномерно на множестве $E = [0; +\infty)$. Тогда равномерной сходимости ряда нет.

13. Найдите интервал и область сходимости степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^{n+1}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1}x^n$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x)^n}{3^n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^n$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x-1)^2$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}$; 14) $\sum_{n=1}^{\infty} n(2x-1)^n$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot x^n$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$; 17) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi n \cdot x^n$; 18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^{n+1}$; 20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1}$; 21) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}\, x^{n-1}$;

22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$; 23) $\sum_{n=1}^{\infty} n(2x-1)^n$; 24) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n}x^n$.

Ответы:

1) интервал сходимости $(-1; 1)$; область сходимости $[-1; 1]$; сходится абсолютно на $[-1; 1]$;

2) интервал сходимости $(-2; 0)$; область сходимости $[-2; 0)$; сходится абсолютно на $(-2; 0)$, в точке $x = -2$ сходится условно;

3) интервал сходимости $(-1; 1)$; область сходимости $[-1; 1)$; сходится абсолютно на $(-1; 1)$, в точке $x = -1$ сходится условно;

4) интервал сходимости $(-2; 4)$; область сходимости $(-2; 4)$; сходится абсолютно на $(-2; 4)$;

5) интервал сходимости $(-1; 1)$; область сходимости $[-1; 1)$; сходится абсолютно на $(-1; 1)$, в точке $x = -1$ сходится условно;

6) интервал сходимости $(1; 3)$; область сходимости $(1; 3)$; сходится абсолютно на $(1; 3)$;

7) интервал сходимости $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; область сходимости $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; сходится абсолютно на $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$;

8) интервал сходимости $(-4; 2)$; область сходимости $(-4; 2)$; сходится абсолютно на $(-4; 2)$;

9) интервал сходимости $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; область сходимости $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; сходится абсолютно на $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

10) интервал сходимости $(-1; 1)$; область сходимости $(-1; 1)$; сходится абсолютно на $(-1; 1)$;

11) интервал сходимости $(-2; 0)$; область сходимости $(-2; 0)$; сходится абсолютно на $(-2; 0)$;

12) интервал сходимости $(0; 2)$; область сходимости $(0; 2)$; сходится абсолютно на $(0; 2)$;

13) интервал сходимости $(-2; 2)$; область сходимости $[-2; 2]$; сходится абсолютно на $[-2; 2]$;

14) интервал сходимости $(0; 1)$; область сходимости $(0; 1)$; сходится абсолютно на $(0; 1)$;

15) интервал сходимости $(-1; 1)$; область сходимости $(-1; 1)$; сходится абсолютно на $(-1; 1)$;

16) интервал сходимости **R**; область сходимости **R**; сходится абсолютно на **R**;

17) интервал сходимости $(-1; 1)$; область сходимости $(-1; 1)$; сходится абсолютно на $(-1; 1)$;

18) интервал сходимости $(-1; 0)$; область сходимости $[-1; 0]$; сходится абсолютно на $[-1; 0]$;

19) интервал сходимости $(-1; 1)$; область сходимости $(-1; 1)$; сходится абсолютно на $(-1; 1)$;

20) интервал сходимости **R**; область сходимости **R**; сходится абсолютно на **R**;

21) интервал сходимости $(-1; 1)$; область сходимости $(-1; 1)$; сходится абсолютно на $(-1; 1)$;

22) интервал сходимости $(-2;0)$; область сходимости $[-2;0]$; сходится абсолютно на $[-2;0]$;

23) интервал сходимости $(-6;-4)$; область сходимости $(-6;-4)$; сходится абсолютно на $(-6;-4)$;

24) интервал сходимости $(-2;2)$; область сходимости $(-2;2)$; сходится абсолютно на $(-2;2)$;

14. Вычислите приближенное значение величины с точностью до 0,01:

1) $\sin 10°$;	2) $\sin 18°$;	3) $\cos 10°$;
4) $\cos 18°$;	5) $\operatorname{arctg} 0{,}1$;	6) $\operatorname{arctg} 0{,}2$;
7) $\ln 1{,}2$;	8) $\ln 1{,}4$;	9) $\sqrt{5}$;
10) $\sqrt{10}$;	11) $\sqrt{11}$;	12) $\sqrt[3]{10}$;
13) $\sqrt[3]{30}$;	14) $\sqrt[4]{14}$;	15) $\sqrt[4]{18}$;
16) $e^{-0{,}1}$;	17) $e^{-0{,}15}$;	18) $e^{-0{,}2}$.

Ответы:

1) 0,17;	2) 0,31;	3) 0,98;
4) 0,95;	5) 0,10;	6) 0,20;
7) 0,18;	8) 0,34;	9) 2,24;
10) 3,16;	11) 3,32;	12) 2,15;
13) 3,11;	14) 1,93;	15) 2,06;
16) 0,90;	17) 0,86;	18) 0,82.

15. Вычислите приближенное значение определенного интеграла с точностью до 0,001:

1) $\int_0^{0,5} e^{-x^3} dx$;	2) $\int_0^{0,2} e^{-x^3} dx$;	3) $\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx$;

4) $\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2} dx$; 5) $\int_0^{0,1} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$; 6) $\int_0^{1} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} dx$;

7) $\int_0^{0,1} \frac{e^{-3x}-1}{x} dx$; 8) $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$; 9) $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

10) $\int_0^{0,2} \sqrt{1+x^2} dx$; 11) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; 12) $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$;

13) $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$; 14) $\int_0^{0,2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; 15) $\int_0^{2} \frac{\sin x}{x} dx$;

16) $\int_0^{0,5} \sqrt{x} \sin \sqrt{x}\, dx$; 17) $\int_0^{0,2} \sin(5x^2) dx$; 18) $\int_0^{0,5} \cos \sqrt{x}\, dx$;

19) $\int_0^{0.5} \cos(3x^2) dx$; 20) $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$; 21) $\int_0^{1} \operatorname{arctg} x^2 dx$.

Ответы:

1) 0,485; 2) 0,200; 3) 0,628;

4) 0,036; 5) 0,098; 6) 1,207;

7) −0,279; 8) 0,191; 9) 0,098;

10) 0,201; 11) 0,498; 12) 0,332;

13) 0,938; 14) 0,200; 15) 1,605;

16) 0,118; 17) 0,013; 18) 0,439;

19) 0,473; 20) 0,487; 21) 0,298.

ГЛАВА VI. РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Понятие ряда Фурье

Определение 1. Пусть на $[a;b] \subset \mathbf{R}$ заданы интегрируемые функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Будем говорить, что функции f_1 и f_2 ортогональны на отрезке $[a;b]$, если

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx = 0.$$

Определение 2. Пусть на $[a;b] \subset \mathbf{R}$ задана система (множество, совокупность) интегрируемых на этом отрезке функций $y = f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$. Будем говорить, что данная система функций является ортогональной на отрезке $[a;b]$, если

$$\forall k \forall n \left(k \neq n \Rightarrow \int_a^b f_k(x) f_n(x)\,dx = 0 \right)$$

и

$$\forall k \forall n \left(k = n \Rightarrow \int_a^b f_k(x) f_n(x)\,dx \neq 0 \right).$$

Определение 3. Совокупность функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots$$

называется тригонометрической.

Теорема 1. Интеграл от периодической функции по любому отрезку, длина которого равна положительному периоду, не зависит от выбора отрезка интегрирования.

Доказательство. Действительно, пусть $T > 0$ – период функции f, а a – произвольное действительное число. Докажем, что

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

По свойству аддитивности определенного интеграла

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

В интеграле I_3 сделаем замену переменной, полагая $x = t + T$. Тогда $t = x - T$, $dx = dt$, и

$$I_3 = \int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt = -\int_a^0 f(t)\,dt = -\int_a^0 f(x)\,dx = -I_1.$$

Таким образом,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 + I_2 - I_1 = I_2 = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Теорема 2. Тригонометрическая система функций ортогональна на любом отрезке длины 2π.

Доказательство. Учитывая утверждение теоремы 1, доказательство проведём для симметричного относительно точки $x = 0$ отрезка $[-\pi;\pi]$.

1. Сначала докажем ортогональность функции $f_1(x) = 1$ ко всем остальным.

Так как при любом натуральном k функция $\sin kx$ нечётная, а промежуток интегрирования $[-\pi;\pi]$ симметричен относительно точки $x = 0$, то для любого натурального k

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0.$$

Далее, для любого натурального k

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx \, dx = \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{k}(\sin k\pi - \sin(-k\pi)) = 0.$$

2. Теперь докажем ортогональность всех синусов всем косинусам.

Заметим, что при любых натуральных k и n функция $\cos kx \sin nx$ является нечётной. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \ dx = 0.$$

3. Далее докажем ортогональность косинусов с разными аргументами, то есть при $k \neq n$.

Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \ dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+n)x + \cos(k-n)x) \ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k+n)x}{k+n} + \frac{\sin(k-n)x}{k-n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k+n)\pi}{k+n} + \frac{\sin(k-n)\pi}{k-n} - \frac{\sin(k+n)(-\pi)}{k+n} - \frac{\sin(k-n)(-\pi)}{k-n}\right) = 0,$$

так как $\sin p\pi = 0$ при любом целом p.

4. Докажем ортогональность синусов с разными аргументами.

Если $k \neq n$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \ dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k-n)x - \cos(k+n)x) \ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k-n)x}{k-n} - \frac{\sin(k+n)x}{k+n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

5. Осталось вычислить интегралы от квадратов функций тригонометрической системы.

Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1^2(x) \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi \neq 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx) \ dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2kx}{2k}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi \neq 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx) \ dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2kx}{2k}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi \neq 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Нормой функции f на отрезке $[a;b]$ называется число, обозначаемое $\|f\|$ и равное корню квадратному из интеграла $\int_a^b f^2(x) \ dx$, то есть

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) \ dx}.$$

Если $\|f\| = 1$, то функция f называется нормированной на отрезке $[a;b]$. Система функций $y = f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, называется нормированной на $[a;b]$, если нормирована каждая функция этой системы. Наконец, система функций $y = f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, называется ортонормированной $[a;b]$, если она является ортогональной и нормированной на этом отрезке, то есть если

$$\int_a^b f_k(x) f_n(x) \, dx = \begin{cases} 0, \text{если } k \neq n, \\ 1, \text{если } k = n \end{cases}.$$

Тогда из доказательства теоремы 2 следует, что тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке длины 2π, но не является ортонормированной на этом отрезке, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1^2(x) \ dx = 2\pi \neq 1; \ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \ dx = \pi \neq 1; \ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \ dx = \pi \neq 1,$$

$$k = 1, 2, \dots .$$

Учитывая последние равенства, получаем, что ортонормированной будет система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \dots .$$

Замечание 2. Ортогональную (ортонормированную) систему функций можно считать аналогом ортогонального (ортонормированного) базиса в конечномерном евклидовом пространстве. Ниже мы убедимся, что существует класс функций, которые являются линейными комбинациями функций ортогональной (ортонормированной) системы.

Определение 4. Функцию вида

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

будем называть тригонометрическим полиномом.

Если при этом $A_n^2 + B_n^2 \neq 0$, то – тригонометрическим полиномом n-го порядка.

Определение 5. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \qquad (1)$$

будем называть тригонометрическим рядом, а числа a_0, a_k, b_k, $k = 1, 2, \dots$, – его коэффициентами.

Очевидно, если ряд (1) сходится в точке x_0, то он сходится и в точках $x_0 \pm 2\pi k$, где $k \in \mathbf{N}$, так как члены ряда являются 2π-периодическими функциями. По той же причине и сумма этого ряда (если она существует) является 2π-периодической функцией.

Теорема 3. Если тригонометрический ряд (1) сходится равномерно на $\mathbf{R}$ к своей сумме $f(x)$, то для его коэффициентов выполняются равенства

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \ k = 0, 1, 2, \dots .$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \ k = 1, 2, 3, \dots .$$

Доказательство. По условию теоремы

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \qquad (2)$$

причём ряд сходится к своей сумме равномерно на $\mathbf{R}$. Общий член ряда является непрерывной функцией. Следовательно, возможно почленное интегрирование ряда (2), например, на отрезке $[-\pi; \pi]$. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx.$$

Все полученные интегралы обращаются в ноль, за исключением первого. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \pi,$$

то есть

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

(Свободный член ряда (2) представляет собой среднее интегральное значение функции f на $[-\pi; \pi]$.)

Теперь рассмотрим произвольное $m = 1, 2, 3, \dots$. Умножим обе части равенства (2) на $\cos mx$:

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx \cos mx + b_k \sin kx \cos mx. \qquad (3)$$

Докажем, что полученный ряд сходится равномерно к своей сумме $f(x) \cos mx$ на $\mathbf{R}$.

Обозначим через $S_n(f;x)$ n-ю частную сумму ряда (2). Тогда $S_n(f;x)\cos mx$ – n-я частная сумма ряда (3).

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Так как последовательность частных сумм $S_n(f;x)$ ряда (2) сходится к f равномерно на **R**, то

$$\exists N\ \forall n\ \forall x \in \mathbf{R}(|S_n(f;x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Но тогда и

$$|S_n(f;x)\cos mx - f(x)\cos mx| = |\cos mx||S_n(f;x) - f(x)| < 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Равномерная сходимость ряда (3) доказана.

Теперь мы можем проинтегрировать равенство (3), интегрируя функциональный ряд почленно. Получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx \cos mx + b_k \sin kx \cos mx\right)dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos mx\,dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \cos mx\,dx.$$

В силу ортогональности тригонометрической системы функций все записанные интегралы обращаются в ноль, за исключением интеграла $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\ dx = \pi$, который получается при $k = m$. Таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\ dx = a_m\pi;$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx,\ m = 1, 2, 3, \dots .$$

Рассуждая аналогичным образом, то есть умножив (2) на $\sin mx$ и интегрируя полученное равенство, мы можем доказать, что

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx,\ m = 1, 2, 3, \dots .$$

Теорема доказана.

Определение 6. Пусть f – 2π-периодическая, интегрируемая на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция. Тригонометрический ряд (1), коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,\ k = 1, 2, 3, \dots \tag{4}$$

называется рядом Фурье функции f.

Таким образом, найти ряд Фурье для функции f – значит найти коэффициенты по формулам (4) и записать тригонометрический ряд (1) с этими коэффициентами.

Замечание 1. Из теоремы 3 следует, что равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье для своей суммы.

Замечание 2. Рассмотрим тригонометрический полином

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx.$$

Учитывая ортогональность тригонометрической системы функций, нетрудно убедиться, что

$$a_k = A_k,\, k = \overline{0,n};\ \ a_k = 0,\, k = n+1, n+2, \ldots\ ;$$

$$b_k = B_k,\, k = \overline{1,n};\ \ b_k = 0,\, k = n+1, n+2, \ldots\ .$$

Это означает, ряд Фурье для $T_n(x)$ совпадает с $T_n(x)$.

§ 2. Сходимость ряда Фурье в среднем квадратичном

Определение 1. Пусть на $[a;b] \subset \mathbf{R}$ заданы интегрируемые функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Неотрицательную величину

$$\rho(f_1; f_2) = \|f_1 - f_2\| = \sqrt{\int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)^2\, dx}$$

будем называть среднем квадратичным расстоянием (отклонением) между функциями f_1 и f_2. (Нетрудно проверить, что введённая в рассмотрение величина $\rho(f_1; f_2)$ задаёт метрику в пространстве интегрируемых на отрезке $[a;b]$ функций.)

Определение 2. Пусть на отрезке $[a;b] \subset \mathbf{R}$ задана последовательность $\{f_n(x)\}$ интегрируемых на $[a;b]$ функций $y = f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, и интегрируемая на $[a;b]$ функция $y = f(x)$. Будем говорить, что $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем квадратичном к функции f на отрезке $[a;b]$, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f_n; f) = 0.$$

Теорема 1. Если $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к f на отрезке $[a;b]$, то $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем квадратичном к функции f на отрезке $[a;b]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Так как $f_n \rightrightarrows f$ на отрезке $[a;b]$, то

$$\exists N\ \forall n\ \forall x \in [a;b] \left(n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}\right).$$

Тогда при $n > N$

$$\rho(f_n;f)=\sqrt{\int_a^b\big(f_n(x)-f(x)\big)^2\ dx}<\sqrt{\int_a^b\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}\right)^2\ dx}=\varepsilon,$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n;f)=0$.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Приведём пример, демонстрирующий данный факт.

Пример

Рассмотрим функции

$$f_i^k(x)=\begin{cases}1,\ \ x\in\left[\frac{i-1}{k};\frac{i}{k}\right],\\ 0,x\in[0;1]\backslash\left[\frac{i-1}{k};\frac{i}{k}\right]\end{cases},\ i=\overline{1,k},\ \ k=1,2,\dots .$$

Образуем функциональную последовательность

$$f_1^1(x),f_1^2(x),f_2^2(x),f_1^3(x),f_2^3(x)f_3^3(x),\dots,f_1^k(x),f_2^k(x),\dots,f_k^k(x),\dots .$$

Нетрудно увидеть, что данная функциональная последовательность расходится в каждой точке отрезка $[0;1]$, а значит нет и равномерной сходимости. С другой стороны, данная последовательность сходится в среднем квадратичном к функции $f(x)\equiv 0$ на отрезке $[0;1]$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\rho(f_n;f)=\lim_{k\to\infty}\rho\big(f_i^k;f\big)=\lim_{k\to\infty}\sqrt{\int_0^1\big(f_i^k(x)-f(x)\big)^2\ dx}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sqrt{\int_{\frac{i-1}{k}}^{\frac{i}{k}}(1-0)^2\ dx}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}=0.$$

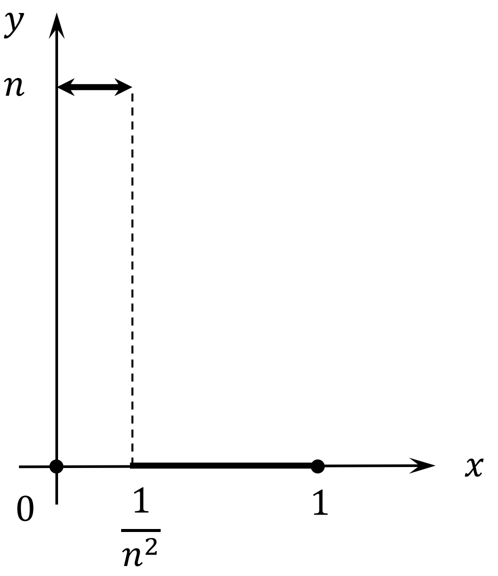
Замечание 2. Приведём ещё один пример функциональной последовательности, сходящейся неравномерно к некоторой функции на некотором отрезке числовой прямой, которая при этом не будет сходится в среднем квадратичном к этой функции на том же отрезке.

Пример. Рассмотрим функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x)=\begin{cases}0,\ \ x=0,\\ n,\ \ x\in\left(0;\frac{1}{n^2}\right),\\ 0,x\in\left[\frac{1}{n^2};1\right]\end{cases}.$$

Достаточно очевидно, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)\equiv 0$ на отрезке $[0;1]$.

График f_n имеет следующий вид



Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0;1]}|f_n(x)-f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \neq 0,$ то $f_n(x)$ сходится к $f(x)=0$ неравномерно.

При этом

$$\lim_{n\to\infty}\rho(f_n;f) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\int_0^1 \big(f_n(x)-f(x)\big)^2\ dx} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\int_0^{\frac{1}{n^2}}(n-0)^2\ dx} = 1 \neq 0,$$

то есть сходимости в среднем квадратичном нет.

Пусть f – 2π-периодическая, интегрируемая на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция. Запишем её ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

и рассмотрим частные суммы ряда

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx.$$

Определение 3. Будем говорить, что ряд Фурье функции f сходится в среднем квадратичном к функции f на **R**, если последовательность $\{S_n(f;x)\}$ его частных сумм сходится в среднем квадратичном к функции f на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Теорема 2 (минимальное свойство частных сумм ряда Фурье). Пусть f – 2π-периодическая, интегрируемая на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция. Тогда среди всех тригонометрических полиномов $T_n(x)$ степени не выше n наименьшее среднее квадратичное отклонение от функции f имеет n-я частная сумма $S_n(f;x)$ ряда Фурье функции f. Таким образом,

$$\min_{T_n}\rho(T_n;f) = \rho(S_n;f).$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$\rho^2(T_n; f) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(T_n(x) - f(x)\big)^2\ dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \big(T_n^2(x) - 2T_n(x) f(x) + f^2(x)\big)\ dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\ dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) f(x)\ dx + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx\right)^2\ dx -$$

$$-2\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx\right) f(x)\ dx + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx =$$

$$= I_1 - 2I_2 + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx. \qquad (1)$$

В силу ортогональности тригонометрической системы функций

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{A_0}{2}\right)^2\ dx + \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} A_k^2 \cos^2 kx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} B_k^2 \sin^2 kx\, dx\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k^2 + B_k^2)\right). \qquad (2)$$

Напомним, что коэффициенты ряда Фурье функции f находятся по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx,\ k = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx,\ k = 1, 2, 3, \dots\,.$$

Тогда

$$I_2 = \frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx + \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx + B_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{A_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k a_k + B_k b_k)\right). \qquad (3)$$

Учитывая равенства (2) и (3), перепишем равенство (1). Имеем

$$\rho^2(T_n; f) = \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k^2 + B_k^2)\right) - 2\pi\left(\frac{A_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k a_k + B_k b_k)\right) +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx = \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k^2 + B_k^2)\right) -$$

$$-2\pi\left(\frac{A_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k a_k + B_k b_k)\right) + \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right) -$$

$$-\pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right) + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx =$$

$$= \pi\left(\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big((A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2\big)\right) - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right) +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx.$$

Таким образом, коэффициенты тригонометрического полинома T_n входят лишь в сумму квадратов $\frac{(A_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}((A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2)$, и наименьшее значение этой суммы равно нулю. Достигается наименьшее значение данной суммы при $A_k=a_k$, $k=0,1,2,\dots$, и $B_k=b_k$, $k=1,2,\dots$, что и требовалось доказать.

Определение 4. Число $E_n(f)=\min\limits_{T_n}\rho(T_n;f)$ называется наилучшим приближением функции f тригонометрическими полиномами T_n в заданной метрике $\rho(T_n;f)=\|T_n-f\|$.

Из доказанной теоремы следует, что наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами T_n степени не выше n достигается, если в качестве такого полинома выбрать частную сумму n-го порядка ряда Фурье функции f.

Следствие 1 (неравенство Бесселя). Пусть f – 2π-периодическая, интегрируемая на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция. Тогда выполняется неравенство

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\ dx.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 2 мы получили равенство

$$\rho^2(T_n;f)=\pi\left(\frac{(A_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}((A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2)\right)-$$
$$-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)+\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\ dx.$$

Выберем в этом равенстве тригонометрический полином $T_n(x)=S_n(f;x)$. Получим равенство

$$\rho^2(S_n;f)=-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)+\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\ dx. \tag{4}$$

Так как $\rho^2(T_n;f)\ge 0$, то и правая часть неравенства (4) неотрицательна

$$-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)+\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\ dx\ge 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$ получим неравенство Бесселя.

Следствие 2. Коэффициенты Фурье 2π-периодической, интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции стремятся к нулю с ростом номера.

Доказательство. Из неравенства Бесселя следует, что положительный ряд $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$ сходится. Тогда в силу необходимого условия сходимости ряда его общий член стремится к нулю при $n\to\infty$.

Замечание 1. Предположим, что ряд Фурье 2π-периодической, интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции f сходится в среднем квадратичном к этой функции на **R**. Тогда, переходя в (4) к пределу при $n\to\infty$, получим равенство Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\ dx.$$

Замечание 2. Если ряд Фурье 2π-периодической, интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции f сходится равномерно к f на **R**, то ряд функции f сходится к f и в среднем квадратичном на **R**, а значит, и в этом случае справедливо равенство Парсеваля.

Замечание 3. На самом деле, требование о сходимости в среднем квадратичном ряда Фурье к функции f является излишним и равенство Парсеваля справедливо для любой 2π-периодической, интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции.

§ 3. Интегральное представление частных сумм ряда Фурье

Определение. Ядром Дирихле порядка n, $n=\ 0,1,2,\dots$, называют функцию

$$D_n(t)=\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt.$$

Лемма. Ядро Дирихле обладает следующими свойствами:

1) является чётной, непрерывной, 2π-периодической функцией;

2) удовлетворяет условию нормировки

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)\,dt=1;$$

3) $D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ при $t\neq 2\pi m$, $D_n(t)=n+\frac{1}{2}$ при $t=2\pi m$, где $m\in\mathbf{Z}$.

Доказательство. 1. Первое утверждение следует из определения ядра Дирихле и свойств косинуса.

2. Второе проверяется непосредственным интегрированием. Действительно,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt\right)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{1}{2}dt+\int_0^{\pi}\cos t\,dt+\int_0^{\pi}\cos 2t\,dt+\ldots+\int_0^{\pi}\cos nt\,dt\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+0+0+\ldots+0\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=1.$$

3. Утверждение следует из цепочки следующих элементарных преобразований:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{1}{2} + \frac{\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos kt}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Теорема. Пусть f – 2π-периодическая, интегрируемая на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция. Тогда для частичных сумм её ряда Фурье справедливы представления

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,dt.$$

В последнем случае принято говорить об интеграле Дирихле.

Доказательство. Фиксируем натуральное n. Учитывая, что

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt,\ k = 1, 2, 3, \dots,$$

запишем

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\right)\cos kx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right)\sin kx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx\right)f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x)dt.$$

Воспользовавшись 2π-периодичностью подынтегральной функции, выполним замену переменного, полагая $z = t - x$, получим

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\,D_n(z)dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt.$$

Первое из представлений получено.

Учитывая чётность ядра Дирихле, мы можем утверждать, что

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x-t)D_n(-t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x-t)D_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x+t)D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(f(x+t)+f(x-t)\big)D_n(t)\,dt.$$

Второе из заявленных представлений получено.

Замечание. Опираясь на доказанную теорему, приведём другое обоснование равенства $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt = 1$ о нормировке ядра Дирихле из леммы.

Рассмотрим тригонометрический полином $T_0(x) = 1$. Выше было показано, что ряд Фурье тригонометрического полинома совпадает с этим полиномом. Тогда каждая n-я частная сумма ряда Фурье, $n \in \mathbf{N}$, тригонометрического полинома $T_0(x) = 1$ будет совпадать с этим полиномом, то есть $S_n(T_0; x) = 1$. С другой стороны, учитывая интегральное представление частных сумм ряда Фурье, мы можем записать

$$S_n(T_0; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi T_0(x+t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi D_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt.$$

Таким образом, $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt = 1$.

§ 4. Осцилляционная лемма

Лемма 1 (осцилляционная лемма). Пусть Φ – 2π-периодическая, интегрируемая на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция. Справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \Phi(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0; \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \Phi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0.$$

Доказательство. Оба равенства доказываются одинаково, докажем первое из них.

$$\int_0^\pi \Phi(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = \int_0^\pi \Phi(t)\left(\cos\frac{t}{2}\cos nt - \sin\frac{t}{2}\sin nt\right)dt =$$

$$= \int_{-\pi}^\pi \varphi_1(t)\cos nt\,dt - \int_{-\pi}^\pi \varphi_2(t)\sin nt\,dt,$$

где

$$\varphi_1(t) = \begin{cases}\Phi(t)\cos\frac{t}{2}, & t\in[0;\pi],\\ 0, & t\in[-\pi;0)\end{cases}, \qquad \varphi_2(t) = \begin{cases}\Phi(t)\sin\frac{t}{2}, & t\in[0;\pi],\\ 0, & t\in[-\pi;0)\end{cases}.$$

Так как функции φ_1 и φ_2 интегрируемы на отрезке $[-\pi;\pi]$, то на интегралы $\int_{-\pi}^\pi \varphi_1(t)\cos nt\,dt$ и $\int_{-\pi}^\pi \varphi_2(t)\sin nt\,dt$ можно смотреть как на коэффициенты Фурье функций Φ_1 и Φ_2, полученных 2π-периодическим продолжением функций φ_1 и φ_2 на всю числовую прямую. А коэффициенты Фурье 2π-периодической, интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции стремятся к нулю с ростом номера.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\Phi(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=0$, что и требовалось доказать.

Определение 1. Если функция f на отрезке $[a;b]$ имеет конечное число точек разрыва и все точки разрыва являются точками разрыва первого рода, то функцию f будем называть кусочно-непрерывной функцией на отрезке $[a;b]$.

Заметим, что кусочно-непрерывная функция на отрезке $[a;b]$ интегрируема на этом отрезке.

Определение 2. 2π-периодическую функцию f будем называть кусочно-непрерывной функцией на $\mathbf{R}$, если f кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Определение 3. Функция f называется кусочно-дифференцируемой (кусочно-непрерывно-дифференцируемой) на отрезке $[a;b]$, если

1) f кусочно-непрерывна на этом отрезке;

2) в каждой точке непрерывности функции f существуют односторонние производные;

3) производная f' функции f имеет конечное число точек разрыва на отрезке $[a;b]$ и все они являются точками разрыва первого рода.

Таким образом, функция f называется кусочно-дифференцируемой на отрезке, если его можно разбить на конечное число отрезков, внутри каждого из которых она имеет непрерывную производную, а на концах этих отрезков имеет конечные односторонние пределы и производные.

Определение 4. 2π-периодическую функцию f будем называть кусочно-дифференцируемой функцией на $\mathbf{R}$, если f кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Лемма 2. Пусть f – 2π-периодическая, кусочно-дифференцируемая на $\mathbf{R}$ функция. Тогда для любого фиксированного $x_0\in\mathbf{R}$ на отрезке $[0;\pi]$ интегрируемы функции

$$\varphi(t)=\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\ \text{ и }\ \psi(t)=\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}.$$

Доказательство. Интегрируемость функций φ и ψ доказывается одинаково. Докажем интегрируемость функции φ на отрезке $[0;\pi]$.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$ на отрезке $[x_0;x_0+\pi]$. Так как f – кусочно-дифференцируемая функция, то найдётся число $t\in(0;\pi]$ такое, что f дифференцируема на полуинтервале $(x_0;x_0+t]$.

Так как f дифференцируема на полуинтервале $(x_0;x_0+t]$, то она и непрерывна на нём. Тогда функция φ будет непрерывна на полуинтервале $(0;t]$. Докажем, что $\lim\limits_{t\to 0+0}\varphi(t)=f'(x_0+0)$.

Возможны два случая.

1. $f(x_0) = f(x_0 + 0)$. В этом случае f непрерывна на отрезке $[x_0; x_0 + t]$, дифференцируема на интервале $(x_0; x_0 + t)$ и, следовательно, к разности $f(x_0 + t) - f(x_0 + 0) = f(x_0 + t) - f(x_0)$ можно применить формулу Лагранжа конечных приращений. Тогда

$$\varphi(t) = \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} = \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = \frac{f'(x_0+\xi)t}{t} = f'(x_0 + \xi),$$

где $\xi \in (0; t)$ и $\xi \to 0 + 0$, когда $t \to 0 + 0$.

Переходя в последнем равенстве к пределу при $t \to 0 + 0$, получим требуемое равенство $\lim\limits_{t\to 0+0} \varphi(t) = f'(x_0 + 0)$.

2. $f(x_0) \neq f(x_0 + 0)$. Введём в рассмотрение вспомогательную функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \neq x_0, \\ f(x_0 + 0) & \text{при } x = x_0 \end{cases}.$$

Функция g непрерывна на отрезке $[x_0; x_0 + t]$, дифференцируема на интервале $(x_0; x_0 + t)$ и, следовательно, к разности $g(x_0 + t) - g(x_0) = f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)$ можно применить формулу Лагранжа конечных приращений. Тогда

$$\varphi(t) = \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} = \frac{g(x_0+t)-g(x_0)}{t} = \frac{g'(x_0+\xi)t}{t} = g'(x_0 + \xi) = f'(x_0 + \xi),$$

где $\xi \in (0; t)$ и $\xi \to 0 + 0$, когда $t \to 0 + 0$.

Переходя в полученном равенстве к пределу при $t \to 0 + 0$, приходим к равенству $\lim\limits_{t\to 0+0} \varphi(t) = f'(x_0 + 0)$.

Так как существует конечный предел $\lim\limits_{t\to 0+0} \varphi(t)$, то функция φ в точке $t = 0$ имеет разрыв первого рода (в точке $t = 0$ функция не определена).

Кроме того, так как f на отрезке $[x_0; x_0 + \pi]$ может иметь лишь конечное число точек разрыва и все эти точки должны являться точками разрыва первого рода, то функция φ на отрезке $[0; \pi]$ может иметь лишь конечное число точек разрыва и все эти точки должны являться точками разрыва первого рода.

Таким образом, φ – кусочно-непрерывная функция на отрезке $[0; \pi]$, следовательно, интегрируема на этом отрезке.

§ 5. Теорема Дирихле о разложении периодической функции в ряд Фурье

Теорема (признак Дирихле). Пусть f – 2π-периодическая, кусочно-дифференцируемая на **R** функция. Тогда ряд Фурье функции f в каждой точке $x \in \mathbf{R}$ сходится к величине $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. В частности, если f непрерывна в точке x, то сумма ряда равна $f(x)$.

Доказательство. Необходимо показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n(f;x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)=0.$$

Поскольку

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)D_n(t)\,dt,$$

то требуемое равенство будет доказано, если мы докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x+t)D_n(t)\,dt-\frac{f(x+0)}{2}\right)=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x+t)D_n(t)\,dt-\frac{f(x+0)}{2}\right)=0.$$

Оба равенства доказываются одинаково, докажем первое из них.

Учитывая, что $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)\,dt=1$, преобразуем выражение под знаком первого предела следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x+t)D_n(t)\,dt-\frac{f(x+0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x+t)D_n(t)\,dt-\frac{f(x+0)}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x+t)-f(x+0)\big)D_n(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\cdot t\cdot D_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

где $\Phi(t)=\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$ – интегрируемая на отрезке $[0;\pi]$ функция (как произведение интегрируемых функций $\varphi(t)=\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ и $\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$).

Тогда согласно осцилляционной лемме

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\Phi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=0,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x+t)D_n(t)\,dt-\frac{f(x+0)}{2}\right)=0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Признак Дирихле даёт достаточные условия разложения функции в тригонометрический ряд Фурье. Существуют другие достаточные условия разложения функции в тригонометрический ряд Фурье. Однако для решения практических задач обычно достаточно доказанной теоремы, так её условиям удовлетворяет большой класс функций.

§ 6. Условия равномерной сходимости ряда Фурье

Теорема. Пусть f – 2π-периодическая, непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция на **R**. Тогда ряд Фурье функции f сходится равномерно к этой функции на **R**.

Доказательство. Согласно признаку Дирихле ряд Фурье функции f сходится к этой функции в каждой точке $x \in \mathbf{R}$. Таким образом,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,\ x \in \mathbf{R}.$$

Необходимо показать равномерную сходимость функционального ряда. Заметим, что ряд мажорируется на **R** положительным рядом

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| + |b_k|. \tag{1}$$

Если мы докажем, что этот ряд сходится, то равномерная сходимость ряда Фурье функции f будет иметь место в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Так как f – 2π-периодическая, кусочно-дифференцируемая функция на **R**, то f' – 2π-периодическая, кусочно-непрерывная функция. Тогда для её коэффициентов Фурье α_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, и β_k, $k = 1, 2, \dots$, выполняется неравенство Бесселя:

$$\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\ dx, \tag{2}$$

и, следовательно, числовой ряд $\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ сходится.

Заметим, что из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k} \right). \tag{3}$$

Действительно, $\frac{|\alpha_k|}{k} \le \frac{1}{2}\left(\alpha_k^2 + \frac{1}{k^2}\right)$, $\frac{|\beta_k|}{k} \le \frac{1}{2}\left(\beta_k^2 + \frac{1}{k^2}\right)$. Так как сходятся положительные ряды $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k^2$ и $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, то ряд (3) сходится в силу признака сравнения положительных рядов.

Далее заметим, что

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx\, dx,\ k = 1, 2, \dots .$$

Интегрируем по частям, полагая $u = \cos kx$, $dv = f'(x)dx$, тогда $du = -k \sin kx\, dx$, $v = f(x)$, и интеграл перепишется в виде

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\, dx = \frac{1}{\pi} f(x)\cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx =$$

$$= 0 + kb_k = kb_k.$$

Тогда

$$b_k = \frac{\alpha_k}{k}, , k = 1, 2, \dots . \tag{4}$$

Аналогично

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\, dx, k = 1, 2, \dots .$$

Снова интегрируем по частям, полагая $u = \sin kx$, $dv = f'(x)dx$, находим $du = k\cos kx\, dx$, $v = f(x)$. Интеграл принимает вид

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\, dx = \frac{1}{\pi} f(x)\sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx =$$

$$= 0 - ka_k = -ka_k.$$

Тогда

$$a_k = -\frac{\beta_k}{k}, k = 1, 2, \dots . \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $\sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}\right)$. В правой части этого равенства стоит сходящийся ряд (3). Следовательно, сходится ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k| + |b_k|)$, а значит, и ряд (1).

§ 7. Условия почленного дифференцирования ряда Фурье

Лемма. Пусть f – 2π-периодическая функция и f имеет непрерывные производные до m-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную $(m+1)$-го порядка. Тогда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^m(|a_k| + |b_k|), \tag{1}$$

где a_k и b_k – коэффициенты Фурье функции f.

Доказательство. Рассмотрим 2π-периодическую, кусочно-непрерывную функцию $f^{(m+1)}$. Обозначим через α_k и β_k коэффициенты Фурье этой функции.

Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}\right)$ сходится (доказательство такое же, как и в предыдущем параграфе).

Выполнив для каждого из двух интегралов, выражающих коэффициенты Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$, $m+1$ раз интегрирование по частям, получим

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\cos kx\,dx = \begin{cases} k^{m+1}b_k, \text{если } m - \text{чётное}, \\ -k^{m+1}a_k, \text{если } m - \text{нечётное}, \end{cases}$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\sin kx\,dx = \begin{cases} -k^{m+1}a_k, \text{если } m - \text{чётное}, \\ k^{m+1}b_k, \text{если } m - \text{нечётное}. \end{cases}$$

Тогда

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1}(|a_k| + |b_k|), \quad \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k} = k^m(|a_k| + |b_k|),$$

и так как ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}\right)$ сходится, то сходится ряд (1).

Теорема. Пусть f – 2π-периодическая функция и f имеет непрерывные производные до m-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную $(m+1)$-го порядка. Тогда ряд Фурье функции f можно дифференцировать почленно m раз, то есть выполнено равенство

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^m\left(a_k\cos\left(kx + \frac{\pi m}{2}\right) + b_k\sin\left(kx + \frac{\pi m}{2}\right)\right), x \in \mathbf{R}.$$

Доказательство. Фиксируем произвольное s, $s = \overline{1,m}$. Рассмотрим ряд, полученный формальным s-кратным почленным дифференцированием ряда Фурье функции f:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^s\left(a_k\cos\left(kx + \frac{\pi s}{2}\right) + b_k\sin\left(kx + \frac{\pi s}{2}\right)\right).$$

Данный ряд мажорируется сходящимся положительным рядом (1) и, следовательно, сходится равномерно на $\mathbf{R}$. Тогда возможность почленного дифференцирования ряда Фурье функции f следует из теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда.

§ 8. Условия почленного интегрирования ряда Фурье

Теорема. Пусть f – 2π-периодическая, непрерывная на $\mathbf{R}$ функция, тогда ряд Фурье функции f

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

можно почленно интегрировать, то есть выполнено соотношение

$$\forall x \in \mathbf{R}\left(\int_0^x f(x)dx = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{k}\sin kx + \frac{b_k}{k}(1 - \cos kx)\right).$$

При этом полученный функциональный ряд будет сходиться равномерно на $\mathbf{R}$ к своей сумме $\int_0^x f(x)dx$.

Доказательство. Рассмотрим функцию (интеграл с переменным верхним пределом) $F(x) = \int_0^x\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)dx$. Поскольку подынтегральная функция $f(x) - \frac{a_0}{2}$ непрерывна на **R**, то функция F дифференцируема на **R**, и её производная $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$ является непрерывной на **R** функцией.

Таким образом, F – непрерывно дифференцируемая функция и по теореме о равномерной сходимости ряда Фурье ряд Фурье функции F сходится равномерно на **R** к F. Пусть

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx. \tag{1}$$

Далее заметим, что для любого $k = 1, 2, \dots$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\, dx.$$

Проинтегрируем по частям. Пусть $u = F(x)$, $dv = \cos kx\, dx$, тогда $du = F'(x)dx = \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)dx$, $v = \frac{1}{k}\sin kx$ и

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi k}F(x)\sin kx \,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)\sin kx\, dx =$$

$$= 0 - \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx + \frac{a_0}{2\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\, dx = -\frac{1}{k}b_k + 0 = -\frac{b_k}{k}.$$

Аналогично, для любого $k = 1, 2, \dots$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin kx\, dx.$$

Пусть $u = F(x)$, $dv = \sin kx\, dx$, тогда $du = F'(x)dx = \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)dx$, $v = -\frac{1}{k}\cos kx$,

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin kx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi k}F(x)\cos kx \,\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)\cos kx\, dx.$$

Заметим, что

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_0^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)dx - \int_0^{-\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi - a_0\pi = 0.$$

Тогда

$$B_k = -\frac{1}{\pi k}F(x)\cos kx \,\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)\cos kx\, dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx - \frac{a_0}{2\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\, dx = \frac{1}{k}a_k - 0 = \frac{a_k}{k}.$$

Итак, мы получили равенства

$$A_k = -\frac{b_k}{k}; \quad B_k = \frac{a_k}{k}, k = 1, 2, \dots . \tag{2}$$

Найдём A_0. Учитывая, что $F(0) = \int_0^0 \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right) dx = 0$, положим $x = 0$ в равенстве (1), тогда

$$F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos 0 + B_k \sin 0;$$

$$0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k;$$

$$A_0 = -2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k. \tag{3}$$

Подставим в (1) выражения (2) и (3) для коэффициентов. Имеем

$$\int_0^x \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right) dx = F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx =$$

$$= -\sum_{k=1}^{+\infty} A_k + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} A_k(-1 + \cos kx) + B_k \sin kx =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k}(1 - \cos kx) + \frac{a_k}{k} \sin kx.$$

Мы доказали, что

$$\int_0^x \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k}(1 - \cos kx) + \frac{a_k}{k} \sin kx.$$

Осталось лишь учесть, что

$$\int_0^x \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right) dx = \int_0^x f(x)dx - \frac{a_0}{2}\int_0^x dx = \int_0^x f(x)dx - \frac{a_0 x}{2}.$$

§ 9. Разложение функций в ряд Фурье

I. Пусть f – 2π-периодическая, кусочно-дифференцируемая на **R** функция. Тогда согласно признаку Дирихле ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{1}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \ k = 1, 2, 3, \dots \tag{2}$$

функции f в каждой точке $x \in \mathbf{R}$ сходится к величине $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. В частности, если f непрерывна в точке x, то сходится к значению $f(x)$.

II. Пусть f – 2π-периодическая, кусочно-дифференцируемая, ***чётная*** функция. Тогда $f(x)\cos kx$ – чётная функция, $f(x)\sin kx$ – нечётная функция (воспользовались следующим свойством чётных и нечётных функций: произведение чётной и нечётной функций есть функция нечётная; произведение двух чётных (нечётных) функций есть функция чётная) и

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\, dx,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = 0,\ k = 1, 2, 3, \dots, \tag{3}$$

поскольку симметричный интеграл от чётной функции равен удвоенному интегралу по половине промежутка интегрирования, а симметричный интеграл от нечётной функции равен нулю.

В этом случае ряд Фурье функции f принимает вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx. \tag{4}$$

III. Пусть f – 2π-периодическая, кусочно-дифференцируемая, ***нечётная*** функция. Тогда $f(x)\cos kx$ – нечётная функция, $f(x)\sin kx$ – чётная функция и

$$a_k = 0,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\, dx,\ k = 1, 2, 3, \dots. \tag{5}$$

Ряд Фурье функции f принимает вид

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx. \tag{6}$$

Замечание. Таким образом, ряд (4) не содержит синусов кратных углов, то есть в ряд Фурье чётной функции входят только чётные функции и свободный член. Ряд (6) не содержит косинусов кратных углов, то есть в ряд Фурье нечётной функции входят только нечётные функции. Ряды (4) и (6) являются частями полного ряда Фурье и называются неполными тригонометрическими рядами Фурье. Если функция f разлагается в неполный тригонометрический ряд (4) или (6), то говорят, что она разлагается в тригонометрический ряд Фурье по косинусам или по синусам соответственно.

IV. ***Случай непериодической функции.*** Теория рядов Фурье построена для 2π-периодических функций. Чтобы представить рядом Фурье непериодическую функцию, заданную на промежутке, нужно сначала построить 2π-периодическое продолжение исходной функции на числовую ось.

Пусть f – кусочно-дифференцируемая функция, ***заданная на отрезке*** $[-\pi; \pi]$. Необходимо разложить функцию f в ряд Фурье на этом отрезке.

Переопределим функцию f в точках $\pm\pi$, полагая

$$f(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Продолжим полученную функцию 2π-периодическим образом на всю числовую ось. В результате получим функцию F – 2π-периодическую, кусочно-дифференцируемую на **R**

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x = \pi(2k+1), \quad k \in \mathbf{Z}, \\ f(x-2\pi k), & x \in (-\pi+2\pi k; \pi+2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Согласно пункту I 2π-периодической функции F можно поставить в соответствие ряд Фурье

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

с коэффициентами

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ k = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,\ k = 1, 2, 3, \dots . \tag{7}$$

В частности, в силу совпадения $f(x)$ и $F(x)$ на $(-\pi; \pi)$, для $f(x)$ имеем

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,\ \ x \in (-\pi; \pi). \tag{8}$$

Пример

Пусть $f(x) = x, x \in (-\pi; \pi)$. Необходимо разложить функцию f в ряд Фурье на интервале $(-\pi; \pi)$.

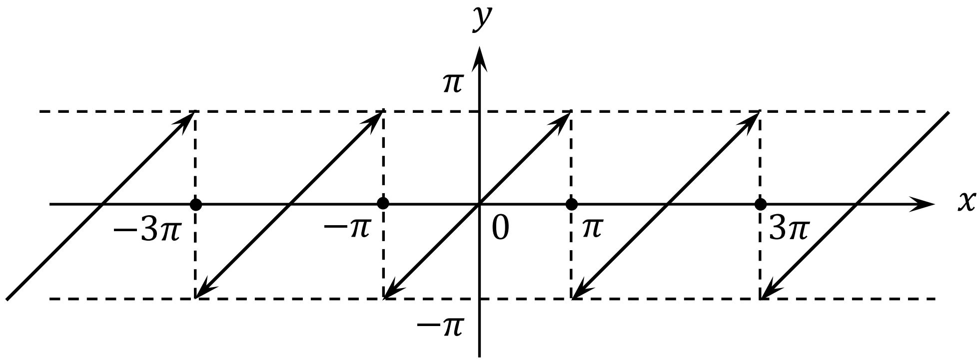
Доопределим функцию f в точках $\pm\pi$, полагая

$$f(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0.$$

Продолжим функцию f 2π-периодическим образом на всю числовую ось. В результате получим функцию F – 2π-периодическую, кусочно-дифференцируемую, заданную равенством

$$F(x) = \begin{cases} \dots, \\ x + 2\pi, & x \in (-3\pi; -\pi), \\ x, & x \in (-\pi; \pi), \\ 0, & x = \pi(2k+1), \quad k \in \mathbf{Z}, \\ x - 2\pi, & x \in (\pi; 3\pi), \\ \dots . \end{cases}$$

График функции F изображён на рисунке.



Мы можем разложить в ряд Фурье функцию F. Так как F – нечётная функция, то коэффициенты Фурье функции F находим по формулам (5). Имеем

$$a_k = 0,\, k = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx\, dx = \left| \begin{matrix} u = x, \quad du = dx; \\ dv = \sin kx\, dx, \\ v = -\frac{1}{k}\cos kx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k} x \cos kx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \cos kx\, dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos \pi k + 0\right) = (-1)^{k+1}\frac{2}{k},\, k = 1, 2, 3, \dots .$$

Тогда учитывая (6), получаем

$$F(x) \sim 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям признака Дирихле, поэтому для всех $x \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$F(x) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

Учитывая, что $f(x) \equiv F(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$, получаем равенство

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx,\ \ x \in (-\pi; \pi).$$

Заметим, что на концах отрезка $[-\pi; \pi]$ сумма ряда равна $F(\pm\pi) = 0$ и не совпадает со значениями исходной функции $f(\pm\pi) = \pm\pi$. Таким образом, на концах отрезка сходимости ряда Фурье к исходной функции нет.

V. Опишем схему представления тригонометрическими рядами ***функций, заданных на промежутках, отличных от*** $[-\boldsymbol{\pi};\boldsymbol{\pi}]$.

Пусть f – кусочно-дифференцируемая функция, заданная на отрезке $[-l;l]$. Необходимо разложить функцию f в ряд Фурье на этом отрезке. Сделаем замену переменной, полагая $x=\frac{l}{\pi}t$, получим кусочно-дифференцируемую функцию $g(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$. Эту функцию можно разложить в ряд Фурье на $[-\pi;\pi]$. Следуя рассуждениям пункта IV, имеем

$$g(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\cos kt+b_k\sin kt,$$

где

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos kt\,dt,\ k=0,1,2,\dots,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin kt\,dt,\ k=1,2,3,\dots.$$

Сделаем обратную замену $t=\frac{\pi}{l}x$, имеем $dt=\frac{\pi}{l}dx$, и

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\cos\frac{\pi k}{l}x+b_k\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{9}$$

где

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx,\ k=0,1,2,\dots,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx,\ k=1,2,3,\dots. \tag{10}$$

Сходимость ряда (9) к $f(x)$ определяется теоремами, аналогичными признаку Дирихле.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что система функций

$$1,\cos\frac{\pi}{l}x,\sin\frac{\pi}{l}x,\cos\frac{2\pi}{l}x,\sin\frac{2\pi}{l}x,\dots,\cos\frac{k\pi}{l}x,\sin\frac{k\pi}{l}x,\dots \tag{11}$$

ортогональна на любом отрезке длины $2l$. Таким образом, мы получили, что если функция задана на $[-l;l]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям аналога признака Дирихле, то она может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье (9) по тригонометрической системе функций (11).

Замечание 2. В некоторых задачах требуется разложить функцию в тригонометрический ряд Фурье по системе функций (11) не на отрезке $[-l;l]$, а на отрезке $[0;2l]$. Учитывая, что для $2l$-периодической функции любые два интеграла от этой функции, взятые по отрезкам длины $2l$, равны между собой, заключаем, что в этом случае достаточно просто изменить пределы интегрирования, заменив нижний предел интегрирования на 0, а верхний предел интегрирования – на $2l$, то есть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\frac{\pi k}{l}x + b_k \sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{12}$$

где

$$a_k = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{\pi k}{l}x\,dx,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx,\ k = 1, 2, 3, \dots . \tag{13}$$

В частности, если требуется разложить функцию в ряд Фурье на отрезке $[0; 2\pi]$, то следует воспользоваться формулой

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{14}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx,\ k = 1, 2, 3, \dots . \tag{15}$$

VI. Пусть f – кусочно-дифференцируемая функция, ***заданная на отрезке*** $[\mathbf{0}; \boldsymbol{l}]$, и требуется разложить функцию в ряд Фурье.

Доопределим (произвольным образом) функцию f на полуинтервале $[-l;\ 0)$, но так, чтобы получившаяся функция оказалась кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-l; l]$. Полученную функцию разложим в ряд Фурье на отрезке $[-l; l]$. Будем иметь требуемое разложение, которое следует рассматривать только для точек $x \in [0; l]$.

Замечание. Так как разложение функции f на отрезке $[0; l]$ предполагает её продолжение на отрезок $[-l; l]$ произвольным образом, то ряд Фурье для f не будет единственным. Чаще всего, для удобства вычислений и компактности записи тригонометрического ряда, функцию f продолжают на промежуток $[-l;\ 0)$ чётным или нечётным образом.

Примеры

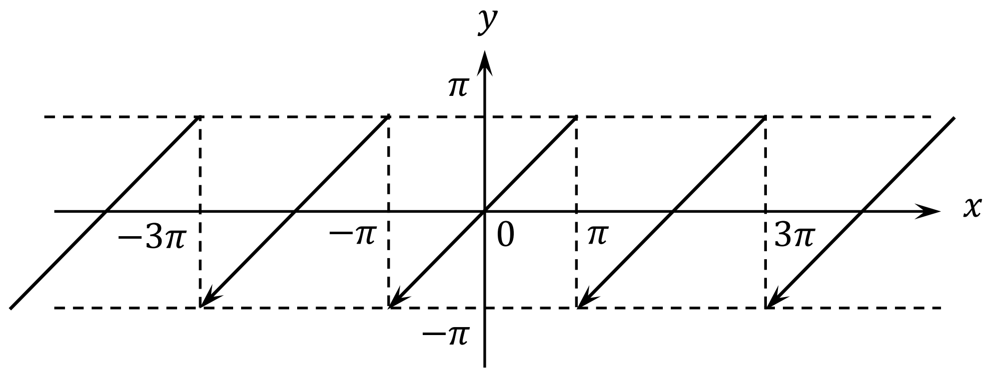
1. Требуется разложить функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0; \pi]$:

а) по синусам; б) по косинусам.

Решение. а) Рассмотрим следующее продолжение функции f на полуинтервал $[-\pi;\ 0)$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi; \pi], \\ \pi, & x = -\pi. \end{cases}$$

Затем продолжим новую функцию на **R** 2π-периодическим образом. Получим функцию F, график которой показан на рисунке



Находим коэффициенты Фурье функции F, используя формулы (5), учитывая, что F, была бы нечётной, если бы в точках $\pi + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$, обращалась в ноль (можно переопределить функцию в этих точках):

$$a_k = 0,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx\, dx = \left| \begin{array}{c} u = x,\ \ du = dx, \\ dv = \sin kx\, dx, \\ v = -\frac{1}{k}\cos kx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k} x \cos kx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \cos kx\, dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos \pi k + 0\right) = (-1)^{k+1}\frac{2}{k},\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

Получаем

$$F(x) \sim 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

В частности,

$$f(x) = x \sim 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx,\ \ x \in [0; \pi].$$

Наконец, учитывая, что f непрерывна на полуинтервале $[0; \pi)$, получаем равенство

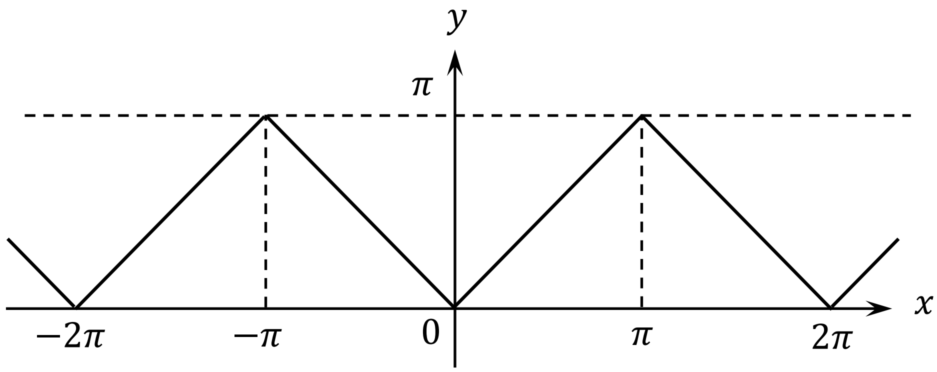
$$x = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx,\ \ x \in [0; \pi).$$

(В точке $x = \pi$ полученный ряд не сходится к $f(\pi) = \pi$, а сходится к $\frac{F(-\pi+0)+F(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$.)

б) Рассмотрим чётное продолжение функции f на полуинтервале $[-\pi;\ 0)$. Имеем

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; \pi], \\ -x, & x \in [-\pi;\ 0). \end{cases}$$

Затем продолжим функцию на **R** 2π-периодическим образом. Получим функцию F, график которой показан на рисунке.



Находим коэффициенты Фурье функции F, используя формулы (3), учитывая, что F – чётная функция.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \pi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \begin{vmatrix} u = x, \;\; du = dx, \\ dv = \cos kx\,dx, \\ v = \frac{1}{k}\sin kx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k}x\sin kx\Big|_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin kx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_0^\pi\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0, & k = 2m, \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k = 2m-1 \end{cases},\; k = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, 3, \dots .$$

$$b_k = 0, k = 1, 2, \dots .$$

Получаем

$$F(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)x.$$

В частности,

$$f(x) = x \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)x,\;\; x \in [0;\pi].$$

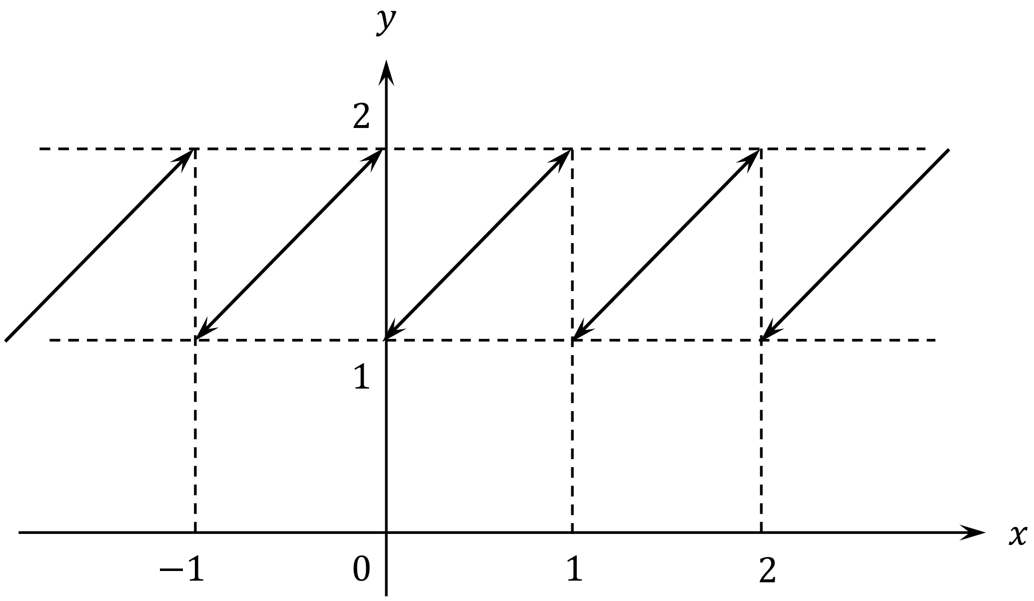
Наконец, учитывая, что f непрерывна на отрезке $[0;\pi]$, получаем равенство

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)x,\;\; x \in [0;\pi].$$

(В точке $x = \pi$ полученный ряд сходится к $f(\pi) = \pi$, так как F непрерывна в этой точке.)

2. Требуется разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на интервале $(1; 2)$.

Решение. Функция задана на отрезке длиной 1, поэтому продолжим функцию на **R** 1-периодическим образом. Получим функцию F, график которой показан на рисунке.



Будем использовать идеологию пункта V.

Находим коэффициенты Фурье функции F, используя формулы (10) и считая $l = \frac{1}{2}$. Имеем

$$a_0 = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(x)\,dx = 2\int_1^2 F(x)\,dx = 2\int_1^2 f(x)\,dx = 2\int_1^2 x\,dx = x^2\Big|_1^2 = 3;$$

$$a_k = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(x)\cos 2k\pi x\,dx = 2\int_1^2 f(x)\cos 2k\pi x\,dx =$$

$$= 2\int_1^2 x\cos 2k\pi x\,dx = \begin{vmatrix} u = x, \ \ du = dx \\ dv = \cos 2k\pi x\,dx, \\ v = \frac{1}{2k\pi}\sin 2k\pi x \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2k\pi} x\sin 2k\pi x\Big|_1^2 - \frac{1}{2k\pi}\int_1^2 \sin 2k\pi x\,dx\right) =$$

$$= 2\left(0 - \frac{1}{4k^2\pi^2}\cos 2k\pi x\Big|_1^2\right) = 0,\ k = 1, 2, 3, \dots;$$

$$b_k = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(x)\sin 2k\pi x\,dx = 2\int_1^2 f(x)\sin 2k\pi x\,dx =$$

$$= 2\int_1^2 x\sin 2k\pi x\,dx = \begin{vmatrix} u = x, \ \ du = dx \\ dv = \sin 2k\pi x\,dx, \\ v = -\frac{1}{2k\pi}\cos 2k\pi x \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2k\pi}x\cos 2k\pi x\,\Big|_1^2 + \frac{1}{2k\pi}\int_1^2 \cos 2k\pi x\,dx\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2k\pi} - \frac{1}{4k^2\pi^2}\sin 2k\pi x\,\Big|_1^2\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2k\pi} - 0\right) = -\frac{1}{k\pi}, k = 1, 2, 3, \dots .$$

Тогда искомый ряд Фурье имеет вид

$$F(x) \sim \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\sin 2k\pi x.$$

В частности,

$$f(x) = x = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\sin 2k\pi x, \ \ x \in (1; 2).$$

§ 10. Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть f – 2π-периодическая, кусочно-дифференцируемая функция на **R**. Этой функции соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx, \tag{1}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \ k = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \ k = 1, 2, 3, \dots , \tag{2}$$

Имеют место формулы Эйлера:

$$\cos x = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}; \ \ \sin x = \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i},$$

и обратная связь:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x; \ \ e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

Используя формулы Эйлера преобразуем выражение под знаком суммы следующим образом:

$$a_k\cos kx + b_k\sin kx = a_k\frac{e^{-ikx} + e^{ikx}}{2} + b_k\frac{e^{-ikx} - e^{ikx}}{2i} =$$

$$= a_k\frac{e^{-ikx} + e^{ikx}}{2} - ib_k\frac{e^{-ikx} - e^{ikx}}{2} = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k)e^{-ikx}.$$

Положим

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k),\ k = 1, 2, 3, \dots ;$$
$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k),\ k = 1, 2, 3, \dots . \tag{3}$$

Тогда ряд (1) можно переписать в виде

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} =$$
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} e^{-ikx} =$$
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=-\infty}^{1} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

Таким образом, ряд Фурье функции f в комплексной записи имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \tag{4}$$

где коэффициенты c_k ряда (4) связаны с коэффициентами ряда (1) формулами (3).

Получим явные выражения для коэффициентов c_k.

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx;$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i \sin kx)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx,\ k = 1, 2, 3, \dots;$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx + i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx + i \sin kx)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx}\, dx,\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

Эти три равенства можно записать в виде одного

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx,\ k \in \mathbf{Z}\,.$$

Окончательно получаем, что ряд Фурье функции f в комплексной записи имеет вид (4), где коэффициенты определяются следующим образом:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx,\ k \in \mathbf{Z}\,. \tag{5}$$

Запишем ядро Дирихле в комплексном виде. Имеем

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-ikx} + e^{ikx}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-ikx} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{-1} e^{ikx} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Таким образом, ядро Дирихле имеет вид

$$D_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}. \tag{6}$$

Получим комплексную форму записи неравенства Бесселя и равенства Парсеваля.

Из равенств (3) находим, что

$$a_0 = 2c_0,\ \ a_k = c_k + c_{-k};\ \ b_k = i(c_k - c_{-k}), k = 1, 2, \dots .$$

Учитывая, что a_k и b_k действительные числа, проведём следующие преобразования.

$$a_k^2 = |a_k|^2 = |c_k + c_{-k}|^2 = (c_k + c_{-k})\left(\overline{c_k + c_{-k}}\right) =$$

$$= (c_k + c_{-k})(\overline{c_k} + \ \overline{c_{-k}}) = c_k\overline{c_k} + c_k\overline{c_{-k}} + c_{-k}\overline{c_k} + c_{-k}\overline{c_{-k}} =$$

$$= |c_k|^2 + c_k\overline{c_{-k}} + c_{-k}\overline{c_k} + |c_{-k}|^2, k = 1, 2, 3, \dots;$$

$$b_k^2 = |b_k|^2 = |i(c_k - c_{-k})|^2 = (c_k - c_{-k})(\overline{c_k - c_{-k}}) =$$

$$= (c_k - c_{-k})(\overline{c_k} - \ \overline{c_{-k}}) = c_k\overline{c_k} - c_k\overline{c_{-k}} - c_{-k}\overline{c_k} + c_{-k}\overline{c_{-k}} =$$

$$= |c_k|^2 - c_k\overline{c_{-k}} - c_{-k}\overline{c_k} + |c_{-k}|^2, k = 1, 2, \dots .$$

Следовательно,

$$a_k^2 + b_k^2 = 2(|c_k|^2 + |c_{-k}|^2), k = 1, 2, \dots .$$

Тогда неравенство Бесселя

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx$$

в комплексной записи имеет вид

$$2c_0^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(|c_k|^2 + |c_{-k}|^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx$$

или

$$c_0^2 + \sum_{k=-n}^{+\infty}|c_k|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx. \tag{7}$$

Равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx$$

в комплексной записи принимает следующий вид:

$$c_0^2 + \sum_{k=-n}^{+\infty}|c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx. \tag{8}$$

Замечание. Комплексная форма записи ряда Фурье (4), его коэффициентов (5), ядра Дирихле (6), неравенства Бесселя (7), равенства Парсеваля (8) обладает, по сравнению с действительной, преимуществом краткости. Кроме того, комплексная форма записи ряда Фурье позволяет легко перейти к понятию интеграла Фурье.

§ 11. Суммы Фейера. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении 2π-периодической непрерывной функции тригонометрическими полиномами

Пусть f – 2π-периодическая, непрерывная функция. Известно, что ряд Фурье функции f может не сходиться к этой функции. Поставим задачу построить последовательность тригонометрических полиномов $\{T_n(x)\}$, сходящуюся равномерно на **R** к функции f.

Определение 1. Пусть f – 2π-периодическая, непрерывная функция и

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

– n-я частная сумма ряда Фурье функции f.

Образуем новые суммы, полагая

$$F_n(f;x) = \frac{1}{n+1}\big(S_0(f;x) + S_2(f;x) + \ldots + S_n(f;x)\big) =$$
$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f;x),\ n = 0\ ,1,2,\ldots .$$

Суммы $F_n(f;x)$, $n = 0,1,2,\ldots$, будем называть суммами Фейера.

Рассмотрим некоторые свойства этих сумм.

1. Суммы Фейера являются тригонометрическими полиномами.

Действительно,

$$F_n(f;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f;x) = \frac{a_0}{2} + \frac{n}{n+1}(a_1 \cos x + b_1 \sin x) +$$
$$+ \frac{n-1}{n+1}(a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ \ldots\ +$$
$$+ \frac{n-k+1}{n+1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \ \ldots\ + \frac{1}{n+1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n+1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

2. Так же как и для частных сумм ряда Фурье, для сумм Фейера можно получить интегральное представление.

$$F_n(f;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_k(t)\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t) dt, \tag{1}$$

где $\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)$.

Определение 2. Функция $\Phi_n(t)$ называется ядром Фейера.

Заметим, что поскольку $D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ при $t \neq 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\ \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t =$$

$$= \frac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}(\cos kt - \cos(k+1)t) =$$

$$= \frac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}(1-\cos(n+1)t) = \frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Таким образом,

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}. \tag{2}$$

3. Одно из свойств частных сумм ряда Фурье состоит в следующем: каждая n-я частная сумма ряда Фурье, $n \in \mathbf{N}$, тригонометрического полинома $T_0(x) = 1$ будет совпадать с этим полиномом, то есть $S_n(T_0; x) = 1$. Тогда

$$F_n(T_0(x); x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(T_0(x); x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1) = 1,$$

и, следовательно, в силу (1) справедливо равенство

$$F_n(T_0(x); x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt = 1. \tag{3}$$

Теорема. Пусть f – 2π-периодическая, непрерывная на **R** функция. Тогда суммы Фейера $F_n(f; x)$ сходятся равномерно к f на **R**.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное.

Так как f – 2π-периодическая, непрерывная функция, то в силу (следствия из) теоремы Кантора f равномерно непрерывна на **R**. Тогда

$$\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall t'\forall t''(\left(|t' - t''| < \delta \Rightarrow |f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Кроме того, так как f – 2π-периодическая, непрерывная функция, то f ограничена на **R**, то есть

$$\exists M > 0 \forall x \in \mathbf{R}(|f(x)| \leq M).$$

Рассмотрим разность

$$F_n(f; x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)dt - f(x)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x+t)-f(x)\big)\Phi_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\big(f(x+t)-f(x)\big)\Phi_n(t)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\big(f(x+t)-f(x)\big)\Phi_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\big(f(x+t)-f(x)\big)\Phi_n(t)dt =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3. \tag{4}$$

Заметим, что

$$|I_2| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\delta}^{\delta}\big(f(x+t)-f(x)\big)\Phi_n(t)dt\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|\Phi_n(t)dt <$$

$$< \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}\Phi_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Кроме того,

$$|I_1| + |I_3| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\big(f(x+t)-f(x)\big)\Phi_n(t)dt\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\big(f(x+t)-f(x)\big)\Phi_n(t)dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}|f(x+t)-f(x)|\Phi_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\Phi_n(t)dt \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}(|f(x+t)|+|f(x)|)\Phi_n(t)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}(|f(x+t)|+|f(x)|)\Phi_n(t)dt \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}2M\Phi_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}2M\Phi_n(t)dt =$$

$$= \frac{2M}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n(t)dt + \int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt\right).$$

Учитывая, что для любого $t \in [-\pi; -\delta] \cup [\delta; \pi]$ справедливы соотношения

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} \le \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} \le \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

продолжим оценку. Имеем

$$|I_1| + |I_3| \le \frac{2M}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n(t)dt + \int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt\right) \le$$

$$\le \frac{M}{(n+1)\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}dt + \int_{\delta}^{\pi}dt\right) < \frac{M}{(n+1)\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}dt = \frac{2M}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

Так как $\frac{2M}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\exists N \forall n \left(n > N \Rightarrow \frac{2M}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

и мы можем продолжить оценку сверху величины $|I_1| + |I_3|$:

$$|I_1| + |I_3| \leq \frac{2M}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} < \frac{\varepsilon}{2},\ n > N. \qquad (6)$$

Учитывая (4) – (6) заключаем, что для любых $x \in \mathbf{R}$ и для любого $n > N$ справедливо

$$|F_n(f; x) - f(x)| = |I_1 + I_2 + I_3| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и означает равномерную сходимость на $\mathbf{R}$ последовательности $\{F_n(f; x)\}$ к функции f.

Следствие (теорема Вейерштрасса). Пусть f – 2π-периодическая, непрерывная функция на $\mathbf{R}$. Тогда для любого положительного числа ε найдётся тригонометрический полином $T(x)$ такой, что

$$\forall x \in \mathbf{R}(|f(x) - T(x)| < \varepsilon).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное. Так как суммы Фейера $F_n(f; x)$ сходятся равномерно к f на $\mathbf{R}$, то

$$\exists N\ \forall n\ \forall x \in \mathbf{R}(n > N \Rightarrow |f(x) - F_n(f; x)| < \varepsilon).$$

Тогда в качестве требуемого тригонометрического полинома $T(x)$ можно взять любую сумму Фейера $F_n(f; x)$ с номером $n > N$.

Таким образом, каждая 2π-периодическая, непрерывная на $\mathbf{R}$ функция может быть равномерно аппроксимирована сколь угодно точно с помощью тригонометрических полиномов.

§ 12. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции алгебраическими полиномами

Теорема. Пусть f – непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция. Тогда для любого положительного числа ε найдётся алгебраический полином $P(x)$ такой, что

$$\forall x \in [a; b](|f(x) - P(x)| < \varepsilon).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное.

Доказательство проведём в два этапа.

1. Пусть $[a; b] = [-1; 1]$. Продолжим функцию f сначала на отрезок $[-\pi; \pi]$, затем – на всю числовую ось так, чтобы получилась 2π-периодическая функция, заданная и непрерывная на $\mathbf{R}$. Так как 2π-периодическая, непрерывная на $\mathbf{R}$ функция может быть равномерно аппроксимирована сколь угодно точно с помощью тригонометрических полиномов, то существует тригонометрический полином

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

такой, что

$$\forall x \in \mathbf{R}\left(|f(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

в частности,

$$\forall x \in [-1;1]\left(|f(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right). \qquad (1)$$

Введём в рассмотрение константу $M = \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |b_k|$.

Функции $\cos kx$, $\sin kx$, $k = 1, 2, \ldots$, разложим в ряды Маклорена. Имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, x \in \mathbf{R};$$

$$\cos kx = 1 - \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^4x^4}{4!} - \ldots, x \in \mathbf{R};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, x \in \mathbf{R};$$

$$\sin kx = x - \frac{k^3x^3}{3!} + \frac{k^5x^5}{5!} - \ldots, x \in \mathbf{R}.$$

Так как на отрезке $[-1;1]$ записанные степенные ряды сходятся равномерно к своим суммам, то для каждой функции $\cos kx$ и для каждой функции $\sin kx$ можно указать частные суммы C_k и S_k степенных рядов, такие, что

$$\forall x \in [-1;1]\left(|\cos kx - C_k| < \frac{\varepsilon}{2M} \ \& \ |\sin kx - S_k| < \frac{\varepsilon}{2M}\right), k = 1, 2, \ldots . \qquad (2)$$

Так как C_k и S_k – алгебраические полиномы, то функция вида

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k C_k + b_k S_k$$

тоже является алгебраическим полиномом.

Покажем, что $P(x)$ – искомый алгебраический полином. Учитывая оценки (1) и (2), имеем

$$|f(x) - P(x)| = \left|\left(f(x) - T_n(x)\right) + \left(T_n(x) - P(x)\right)\right| \leq$$

$$\leq |f(x) - T_n(x)| + |T_n(x) - P(x)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{k=1}^{n}\left(a_k(\cos kx - C_k) + b_k(\sin kx - S_k)\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n}(|a_k||\cos kx - C_k| + |b_k||\sin kx - S_k|) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|\frac{\varepsilon}{2M} + |b_k|\frac{\varepsilon}{2M}\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M}\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M}M = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Пусть f – непрерывная на произвольном отрезке $[a; b]$. Положим

$$x = \frac{a+b+(b-a)y}{2}, \ y \in [-1; 1],$$

и рассмотрим функцию $\varphi(y) = f\left(\frac{a+b+(b-a)y}{2}\right)$ на отрезке $[-1; 1]$. Так как функция φ непрерывна на отрезке $[-1; 1]$, то согласно первому пункту доказательства найдётся алгебраический полином $P(y)$ такой, что

$$\forall y \in [-1; 1](|\varphi(y) - P(y)| < \varepsilon).$$

Возвращаясь к исходной переменной $x = \frac{a+b+(b-a)y}{2}$, учитывая, что

$$y = \frac{2x-a-b}{b-a},$$

имеем

$$\forall x \in [a; b]\left(\left|f(x) - P\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)\right| < \varepsilon\right).$$

Так как $P\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$ – алгебраический полином, то утверждение доказано.

Таким образом, каждая непрерывная функция f, заданная на отрезке $[a; b]$, может быть равномерно аппроксимирована сколь угодно точно с помощью алгебраических полиномов.

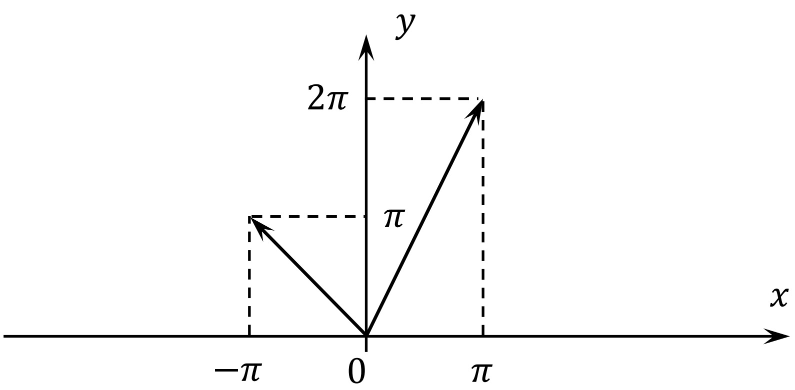
Задачи к главе VI

Как правило, при решении задач о разложении заданной функции в ряд Фурье придерживаются следующей схемы:

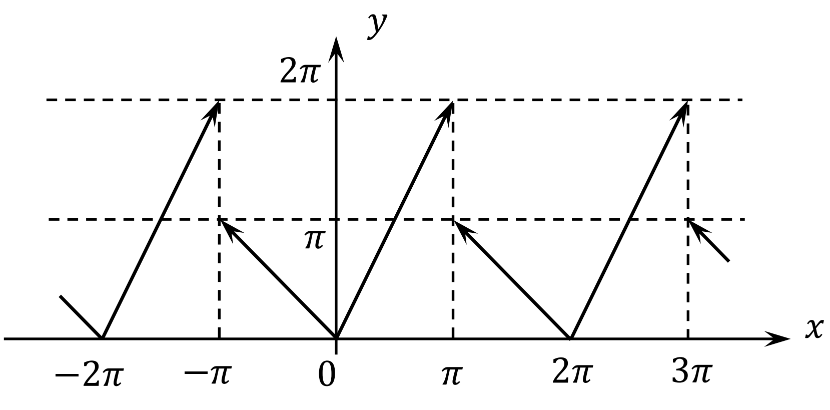
1) строим график заданной функции f;
2) находим её периодическое продолжение F на **R**;
3) выясняем, является ли функция F чётной, нечётной или функцией общего вида;
4) проверяем выполнение условий признака Дирихле;
5) вычисляем коэффициенты ряда Фурье;
6) записываем ряд Фурье;
7) записываем сумму полученного ряда;
8) строим график суммы полученного ряда.

1. Требуется функцию $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\pi; 0), \\ 2x, & x \in [0; \pi) \end{cases}$ разложить в ряд Фурье на интервале $(-\pi; \pi)$. С помощью полученного разложения найти сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Решение. 1. Строим график заданной функции f.



2. Находим периодическое продолжение F функции f на **R**. График функции F показан на рисунке.



3. Функция F является функцией общего вида.

4. Функция F является 2π-периодической, кусочно-дифференцируемой на **R**, а значит удовлетворяет условиям признака Дирихле и может быть представлена рядом Фурье.

5. Находим коэффициенты ряда Фурье функции F.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \int_0^{\pi} 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + x^2\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi^2\right) = \frac{3\pi}{2};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} x\cos kx\,dx + 2\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x, \ \ du = dx; \\ dv = \cos kx\,dx, \\ v = \frac{1}{k}\sin kx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}x\sin kx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx + \frac{2}{k}x\sin kx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_{-\pi}^{0} + 0 + \frac{2}{k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k^2}(1-\cos\pi k) + \frac{2}{k^2}(\cos\pi k - 1)\right) = \frac{3}{\pi k^2}(\cos\pi k - 1) =$$

$$= \frac{3}{\pi k^2}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & k = 2m, \\ -\frac{6}{\pi k^2}, & k = 2m-1, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, 3, \dots;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} x\sin kx\,dx + 2\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x, \ \ du = dx; \\ dv = \sin kx\,dx, \\ v = -\frac{1}{k}\cos kx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}x\cos kx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\cos kx\,dx - \frac{2}{k}x\cos kx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}\cos\pi k - \frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2\pi}{k}\cos\pi k + \frac{2}{k^2}\sin kx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

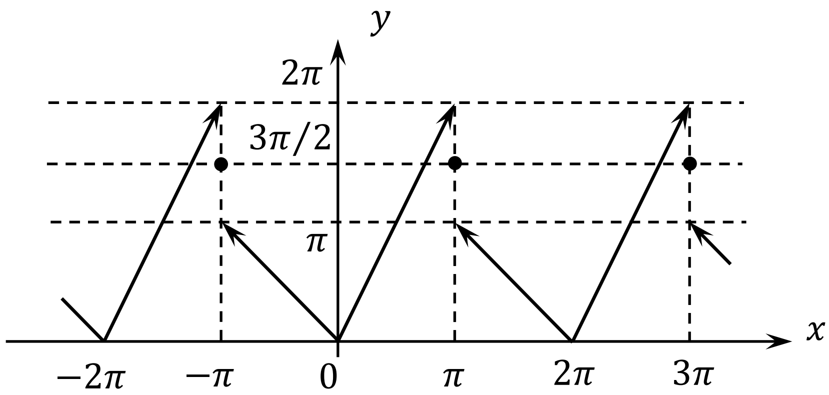
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}(-1)^k - 0 - \frac{2\pi}{k}(-1)^k + 0\right) = \frac{1}{k}(-1)^{k+1}, \ k = 1, 2, 3, \dots .$$

6. Записываем ряд Фурье функции F.

$$F(x) \sim \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3}{\pi k^2}((-1)^k - 1)\cos kx + \frac{1}{k}(-1)^{k+1}\sin kx.$$

7. Записываем сумму полученного ряда: сумма $S(x)$ полученного ряда на **R** принимает значения функции F в точках непрерывности этой функции и значение $\frac{F(-\pi+0)+F(\pi-0)}{2}=\frac{\pi+2\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$ в точках разрыва $x=\pi+2\pi n,\, n\in\mathbf{Z}$ функции F.

8. Строим график $S(x)$ суммы полученного ряда.



В частности, справедливо равенство

$$f(x)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3}{\pi k^2}((-1)^k-1)\cos kx+\frac{1}{k}(-1)^{k+1}\sin kx,\; x\in(-\pi;\pi).$$

Используя разложение функций в ряды Фурье, можно находить суммы некоторых сходящихся числовых рядов.

В последнем равенстве положим $x=0$. Имеем

$$f(0)=0=\frac{3\pi}{4}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3}{\pi k^2}((-1)^k-1)\cos 0+\frac{1}{k}(-1)^{k+1}\sin 0=$$

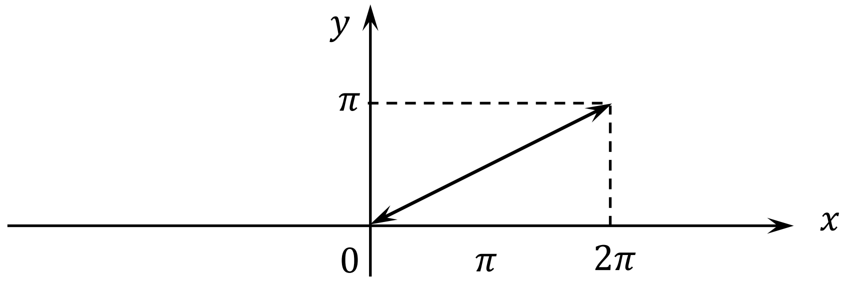
$$=\frac{3\pi}{4}-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{6}{\pi(2m-1)^2}=\frac{3\pi}{4}-\frac{6}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^2},$$

$$\frac{6}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\frac{3\pi}{4}.$$

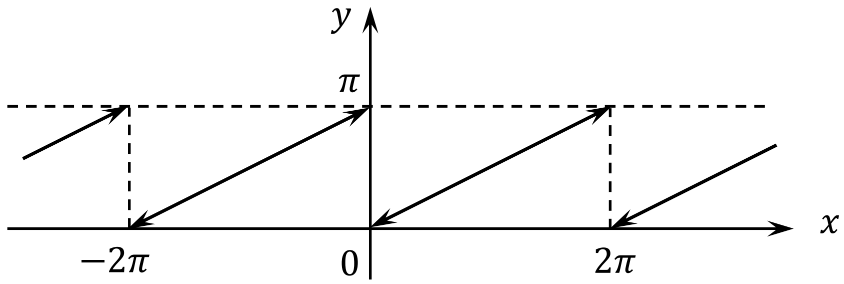
Таким образом, $\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

2. Требуется функцию $f(x)=\frac{x}{2}$ разложить в ряд Фурье на интервале $(0;2\pi)$.

Решение. 1. Строим график заданной функции f.



2. Находим периодическое продолжение F функции f на **R**. График функции F показан на рисунке.



3. Функция F является функцией общего вида.

4. Функция F является 2π-периодической, кусочно-дифференцируемой на **R**, а значит, удовлетворяет условиям признака Дирихле и может быть представлена рядом Фурье.

5. Находим коэффициенты ряда Фурье функции F.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{4}\Big|_0^{2\pi} = \pi;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\cos kx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x, \;\; du = dx; \\ dv = \cos kx\,dx, \\ v = \frac{1}{k}\sin kx \end{matrix}\right| = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{k}x\sin kx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin kx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(0 + \frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(0 + \frac{1}{k^2}(0-0)\right) = 0,\, k = 1, 2, 3, \dots .$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\sin kx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kx\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x, \;\; du = dx; \\ dv = \sin kx\,dx, \\ v = -\frac{1}{k}\cos kx \end{matrix}\right| = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{k}x\cos kx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{k} + \frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{k} + 0\right) = -\frac{1}{k},\, k = 1, 2, 3, \dots .$$

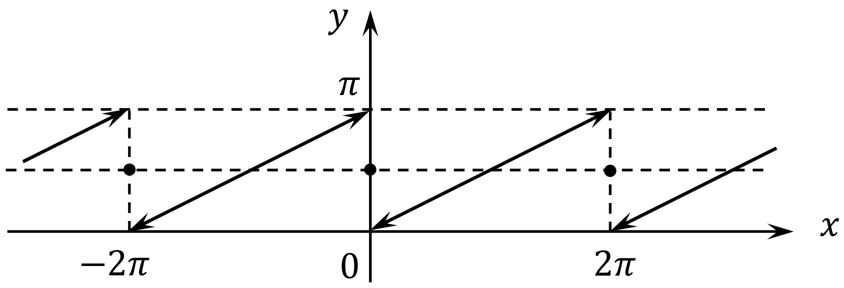
6. Записываем ряд Фурье функции F.

$$F(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\sin kx.$$

7. Записываем сумму полученного ряда: сумма $S(x)$ полученного ряда на **R** принимает значения функции F в точках непрерывности этой

функции и значение $\frac{F(0+0)+F(2\pi-0)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ в точках разрыва $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, функции F.

8. Строим график $S(x)$ суммы полученного ряда.

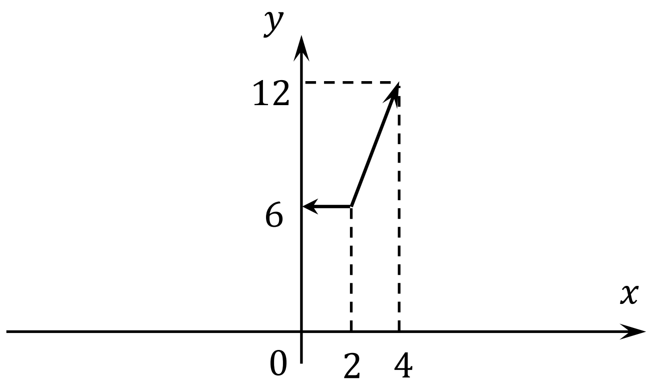


В частности, справедливо равенство

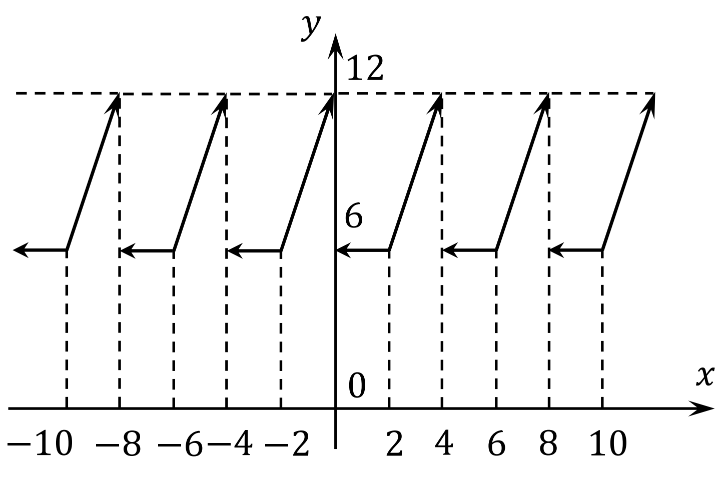
$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin kx,\ x \in (0; 2\pi).$$

3. Требуется функцию $f(x) = \begin{cases} 6, & x \in (0; 2), \\ 3x, & x \in [2; 4) \end{cases}$ разложить в ряд Фурье на интервале $(0; 4)$.

Решение. 1. Строим график заданной функции f.



2. Находим 4-периодическое продолжение F функции f на $\mathbf{R}$. График функции F показан на рисунке.



3. Функция F является функцией общего вида.

4. Функция F является 4-периодической, кусочно-дифференцируемой на **R**, а значит, удовлетворяет условиям признака Дирихле (точнее – его аналогу) и может быть представлена рядом Фурье.

5. Находим коэффициенты ряда Фурье функции F.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 F(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\,dx + \int_2^4 3x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(6x\,\Big|_0^2 + \frac{3x^2}{2}\Big|_2^4\right) = \frac{1}{2}(12 + 24 - 6) = 15;$$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_0^4 F(x)\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(6\int_0^2 \cos\frac{k\pi x}{2}\,dx + 3\int_2^4 x\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x, \;\; du = dx; \\ dv = \cos\frac{k\pi x}{2}\,dx, \\ v = \frac{2}{\pi k}\sin\frac{k\pi x}{2} \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{12}{\pi k}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{6}{\pi k}x\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_2^4 - \frac{6}{\pi k}\int_2^4 \sin\frac{k\pi x}{2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + 0 + \frac{12}{\pi^2 k^2}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_2^4\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{\pi^2 k^2}(1 - (-1)^k) = \frac{6}{\pi^2 k^2}(1 - (-1)^k) =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 2m, \\ \frac{12}{\pi k^2}, & k = 2m - 1 \end{cases}, \; k = 1, 2, 3, \dots, \; m = 1, 2, 3, \dots;$$

$$b_k = \frac{1}{2}\int_0^4 F(x)\sin\frac{k\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(6\int_0^2 \sin\frac{k\pi x}{2}\,dx + 3\int_2^4 x\sin\frac{k\pi x}{2}\,dx\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x, \;\; du = dx; \\ dv = \sin\frac{k\pi x}{2}\,dx, \\ v = -\frac{2}{\pi k}\cos\frac{k\pi x}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{12}{\pi k}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{6}{\pi k}x\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_2^4 + \frac{6}{\pi k}\int_2^4 \cos\frac{k\pi x}{2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{12}{\pi k}((-1)^k - 1) - \frac{6}{\pi k}(4 - 2(-1)^k) + \frac{12}{\pi^2 k^2}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_2^4\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi k}(-12((-1)^k - 1) - 6(4 - 2(-1)^k) + 0) =$$

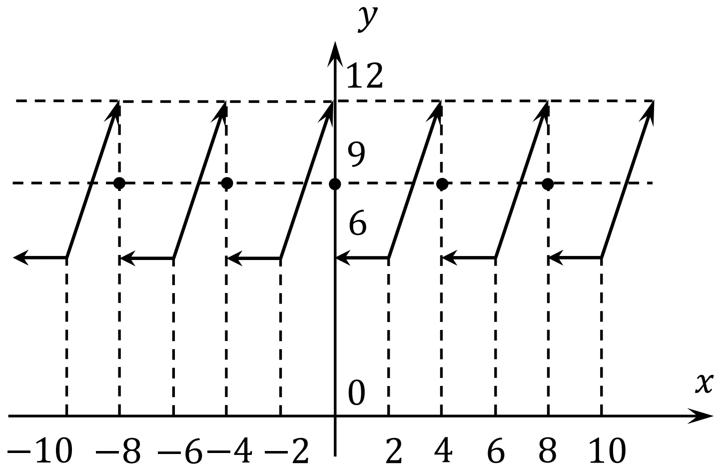
$$= \frac{1}{2\pi k}(-12(-1)^k + 12 - 24 + 12(-1)^k) = -\frac{6}{\pi k}, \; k = 1, 2, 3, \dots .$$

6. Записываем ряд Фурье функции F.

$$F(x) \sim \frac{15}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6}{\pi^2 k^2}(1-(-1)^k)\cos\frac{k\pi x}{2} - \frac{6}{\pi k}\sin\frac{k\pi x}{2}.$$

7. Записываем сумму полученного ряда: сумма $S(x)$ полученного ряда на **R** принимает значения функции F в точках непрерывности этой функции и значение $\frac{F(0+0)+F(4-0)}{2} = \frac{6+12}{2} = 9$ в точках разрыва $x = 4n$, $n \in \mathbf{Z}$ функции F.

8. Строим график $S(x)$ суммы полученного ряда.

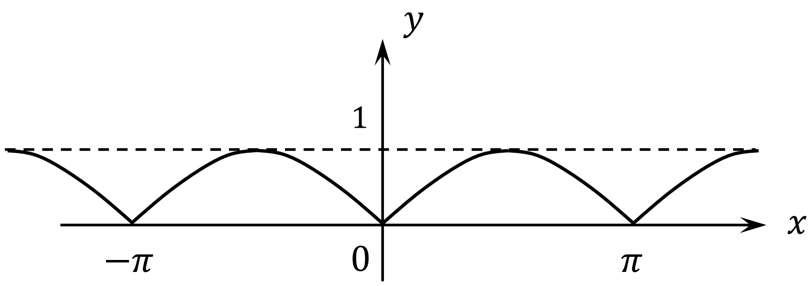


В частности, справедливо равенство

$$f(x) = \frac{15}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6}{\pi^2 k^2}(1-(-1)^k)\cos\frac{k\pi x}{2} - \frac{6}{\pi k}\sin\frac{k\pi x}{2},\ x \in (0;4).$$

4. Требуется 2π-периодическую функцию $f(x) = |\sin x|$ разложить в ряд Фурье и, используя полученное разложение, найти сумму числового ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

Решение. 1. Строим график заданной функции f.



2. Так как f – 2π-периодическая функция, то $F = f$.

3. Функция f является чётной функцией.

4. Функция f является 2π-периодической, кусочно-дифференцируемой на **R**, а значит, удовлетворяет условиям признака Дирихле и может быть представлена рядом Фурье.

5. Находим коэффициенты ряда Фурье функции f.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\cos x\,\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{4}{\pi};$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2\pi}\cos 2x\,\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}(1-1) = 0;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(k+1)x - \sin(k-1)x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k+1}\cos(k+1)x\,\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k-1}\cos(k-1)x\,\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k+1}((-1)^{k+1}-1) + \frac{1}{k-1}((-1)^{k-1}-1)\right),\ k = 2, 3, \dots .$$

Заметим, что при $k = 2m$, $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$a_k = a_{2m} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2m+1}((-1)^{2m+1}-1) + \frac{1}{2m-1}((-1)^{2m-1}-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2m+1}(-2) + \frac{1}{2m-1}(-2)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m-1}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-2}{4m^2-1} = \frac{-4}{\pi(4m^2-1)},\ m = 1, 2, 3, \dots .$$

Если же $k = 2m-1$, $m = 2, 3, 4, \dots$, то

$$a_k = a_{2m-1} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2m}((-1)^{2m}-1) + \frac{1}{2m-2}((-1)^{2m-2}-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2m}\cdot 0 + \frac{1}{2m-2}\cdot 0\right) = 0,\ m = 2, 3, 4, \dots .$$

Так как f – чётная функция, то все коэффициенты $b_k = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

6. Записываем ряд Фурье функции f.

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{4m^2-1}\cos 2mx.$$

7. Так как f – непрерывна на всей числовой прямой, то сумма полученного ряда $S(x) = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

8. Таким образом, справедливо равенство

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{4m^2-1}\cos 2mx,\ x \in \mathbf{R}.$$

В полученном равенстве положим $x = 0$. Имеем

$$f(0) = 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{4m^2-1},$$

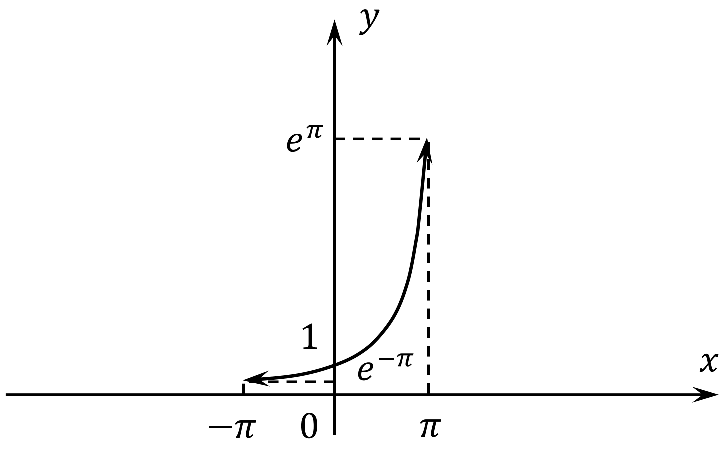
$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{4m^2-1} = \frac{2}{\pi}\,.$$

Следовательно,

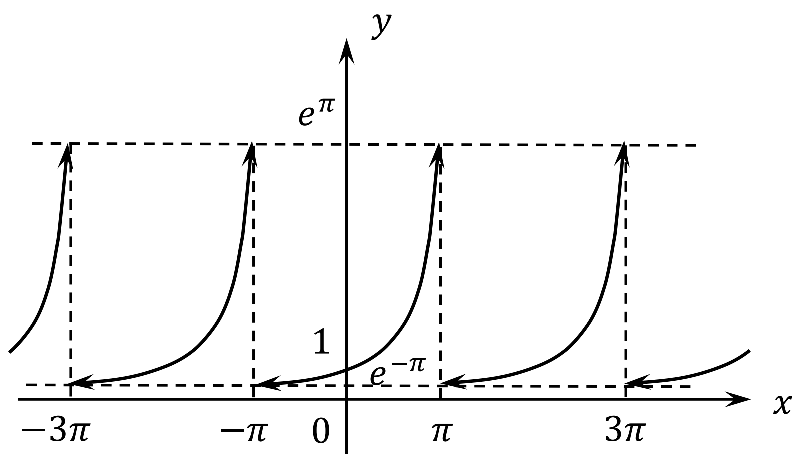
$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

5. Требуется функцию $f(x) = e^{-x}$ разложить в ряд Фурье на интервале $(-\pi;\pi)$.

Решение. 1. Строим схематично график заданной функции f.



2. Находим периодическое продолжение F функции f на **R**. График функции F показан на рисунке.



3. Функция F является функцией общего вида.

4. Функция F является 2π-периодической, кусочно-дифференцируемой на $\mathbf{R}$, а значит, удовлетворяет условиям признака Дирихле и может быть представлена рядом Фурье.

5. В данном случае удобно воспользоваться комплексной формой записи ряда Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},$$

где коэффициенты

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx,\ k \in \mathbf{Z}\,.$$

Находим коэффициенты c_k ряда Фурье функции F.

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}e^{-ikx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+ik)x}\,dx = -\frac{1}{2\pi(1+ik)}e^{-(1+ik)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi(1+ik)}\left(e^{-(1+ik)\pi} - e^{(1+ik)\pi}\right) = -\frac{1}{2\pi(1+ik)}\left(e^{-\pi}e^{-ik\pi} - e^{\pi}e^{ik\pi}\right).$$

Далее, воспользовавшись формулой Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

заметим, что

$$e^{-ik\pi} = \cos(-k\pi) + i\sin(-k\pi) = (-1)^k;$$

$$e^{ik\pi} = \cos k\pi + i\sin k\pi = (-1)^k,$$

и, следовательно,

$$c_k = \frac{1}{2\pi(1+ik)}\left(e^{\pi}e^{ik\pi} - e^{-\pi}e^{-ik\pi}\right) = \frac{1}{2\pi(1+ik)}(e^{\pi}(-1)^k - e^{-\pi}(-1)^k) =$$

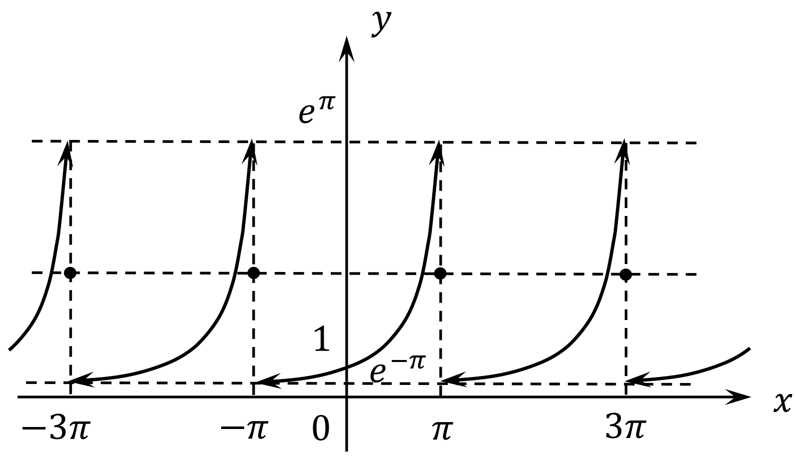
$$= \frac{(-1)^k}{2\pi(1+ik)}(e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{(-1)^k}{\pi(1+ik)}\cdot\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2} = \frac{(-1)^k}{\pi(1+ik)}\operatorname{sh}\pi.$$

6. Записываем ряд Фурье функции F.

$$F(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k}{\pi(1+ik)}\operatorname{sh}\pi\right)e^{ikx} = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+ik}e^{ikx}.$$

7. Записываем сумму полученного ряда: сумма $S(x)$ полученного ряда на $\mathbf{R}$ принимает значения функции F в точках непрерывности этой функции и значение $\frac{F(-\pi+0)+F(\pi-0)}{2} = \frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{2} = \operatorname{ch}\pi$ в точках разрыва $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ функции F.

8) Строим график $S(x)$ суммы полученного ряда.



В частности, справедливо равенство

$$e^{-x} = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+ik}e^{ikx},\ x \in (-\pi;\pi).$$

Перейдём к действительной форме ряда Фурье. Заметим, что

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+ik}e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^k}{1+ik}e^{ikx} + 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+ik}e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{-k}}{1-ik}e^{-ikx} + 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+ik}e^{ikx} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{1-ik}e^{-ikx} + \frac{1}{1+ik}e^{ikx}\right) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1+ik}{1+k^2}e^{-ikx} + \frac{1-ik}{1+k^2}e^{ikx}\right) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}\Big((1+ik)e^{-ikx} + (1-ik)e^{ikx}\Big) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}\Big((1+ik)(\cos(-kx) + i\sin(-kx)) +$$
$$+ (1-ik)(\cos kx + i\sin kx)\Big) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}\Big((1+ik)(\cos kx - i\sin kx) +$$
$$+ (1-ik)(\cos kx + i\sin kx)\Big) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx - i\sin kx + ik\cos kx + k\sin kx +$$

$$+ \cos kx + i\sin kx - ik\cos kx + k\sin kx) =$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx + k\sin kx).$$

Таким образом,

$$e^{-x} = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\Big(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx + k\sin kx)\Big),\ x \in (-\pi;\pi).$$

6. Найти сумму числового ряда $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

Указание: применить равенство Парсеваля к функции $f(x) = x$.

Решение. В § 9 для функции $f(x) = x$, $x \in (-\pi;\pi)$, было получено разложение в ряд Фурье вида

$$x = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx,\ x \in (-\pi;\pi).$$

Таким образом, для коэффициентов Фурье функции f справедливы равенства

$$a_k = 0, k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}, k = 1, 2, 3, \dots .$$

Перепишем равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx,$$

учитывая вид коэффициентов Фурье и тот факт, что $f(x) = x$. Имеем

$$0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(0^2 + \left((-1)^{k+1}\frac{2}{k}\right)^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx;$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{k^2} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Замечание. Функция $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$ называется дзета-функцией Римана. Таким образом, мы нашли значение этой функции в точке $s = 2$, равное $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7. Найти сумму числового ряда $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$.

Указание: применить равенство Парсеваля к функции $f(x) = x^2$.

Решение. Для функции $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi;\pi)$, справедливо следующее разложение в ряд Фурье (поверьте самостоятельно):

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx,\ x \in (-\pi;\pi).$$

Таким образом, для коэффициентов Фурье функции f справедливы равенства

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3};\ \ a_k = \frac{4}{k^2}(-1)^k, k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_k = 0,\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

Перепишем равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx,$$

учитывая вид коэффициентов Фурье и тот факт, что $f(x) = x^2$. Последовательно находим

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{4}{k^2}(-1)^k\right)^2 + 0^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\, dx;$$

$$\frac{2\pi^4}{9} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{16}{k^4} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi^5}{5} = \frac{2\pi^4}{5};$$

$$16\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9} = \frac{8\pi^4}{45};$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^2}{90}.$$

Замечание. Мы нашли значение дзета-функции Римана в точке $s = 4$, равное $\zeta(4) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^2}{90}$.

8. Необходимо найти суммы числовых рядов $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 kd}{k^2}$ и $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 kd}{k^2}$, где $d = const \in (0; \pi)$.

Указание: применить равенство Парсеваля к функции $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \in [d; \pi], \\ 1, & |x| \in [0; d). \end{cases}$

Решение. Для функции $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \in [d; \pi], \\ 1, & |x| \in [0; d) \end{cases}$ справедливо разложение в ряд Фурье (задача для самостоятельного решения) вида

$$f(x) = \frac{d}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kd}{k}\cos kx,\ x \neq \pm d.$$

Таким образом, для коэффициентов Фурье функции f справедливы равенства

$$a_0 = \frac{2d}{\pi};\ \ a_k = \frac{2\sin kd}{\pi k},\ k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_k = 0,\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

Перепишем равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx,$$

учитывая эти равенства и тот факт, что $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \in [d; \pi], \\ 1, & |x| \in [0; d) \end{cases}$, получим

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2d}{\pi}\right)^2+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{2\sin kd}{\pi k}\right)^2+0^2\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^d 1\,dx=\frac{2d}{\pi};$$

$$\frac{2d^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 kd}{k^2}=\frac{2d}{\pi};$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 kd}{k^2}=d-\frac{d^2}{\pi};$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 kd}{k^2}=\frac{\pi}{2}\left(d-\frac{d^2}{\pi}\right)=\frac{d(\pi-d)}{2}.$$

Таким образом, $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 kd}{k^2}=\frac{d(\pi-d)}{2}$.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 kd}{k^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-\sin^2 kd}{k^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 kd}{k^2}=$$

$$=\frac{\pi^2}{6}-\frac{d(\pi-d)}{2}=\frac{\pi^2-3d\pi+3d^2}{6}.$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 kd}{k^2}=\frac{\pi^2-3d\pi+3d^2}{6}.$$

Замечание. Мы получили, что $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 kd}{k^2}=\frac{d(\pi-d)}{2}$. Положим в этом равенстве $d=\frac{\pi}{2}$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{k\pi}{2}}{k^2}=\frac{\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Учитывая, что

$$\sin^2\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2m,\\ 1, & k=2m-1\end{cases},\ m=1,2,3,\dots .$$

переписываем

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Таким образом, мы нашли сумму ещё одного числового ряда.

9. Найдите разложение в ряд Фурье 2π-периодической функции f, если на отрезке $[-\pi;-\pi]$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi;0],\\ 1, & x\in(0;\pi].\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi k}(1-(-1)^k)\sin kx$, $x\neq\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

10. Найдите разложение в ряд Фурье функции f, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \in [d;\pi], \\ 1, & |x| \in [0;d), \end{cases} \quad d = const \in (0;\pi).$$

на отрезке $[-\pi;-\pi]$.

Ответ: $f(x) = \frac{d}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kd}{k}\cos kx,\ x \neq \pm d.$

11. Найдите разложение в ряд Фурье 2π-периодической функции f, если на отрезке $[-\pi;-\pi]$

$$f(x) = x^2.$$

Ответ: $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx.$

12. Найдите разложение в ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & x \in [-\pi;0], \\ \frac{\pi}{2} - x, & x \in (0;\pi] \end{cases}$$

на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Ответ: $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$

13. Найдите разложение в ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi;0], \\ \sin x, & x \in (0;\pi] \end{cases}$$

на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx.$

14. Найдите разложение в ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \\ 1, & x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right] \end{cases}$$

на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Ответ: $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\cos\frac{\pi k}{2} - \cos\pi k\right)\sin kx,\ x \neq \pm\pi, \pm\frac{\pi}{2}.$

15. Найдите разложение в ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}3, & x \in \left(0; \frac{1}{2}\right), \\ -0{,}3, & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}$$

в интервале $(0; 1)$ в неполные ряды Фурье, содержащие

а) только косинусы;

б) только синусы.

Ответ: а) $f(x) = \frac{1{,}2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos(2k-1)\pi x,\ x \neq \frac{1}{2}$;

б) $f(x) = \frac{1{,}2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(4k-2)\pi x,\ x \neq \frac{1}{2}$.

16. Найдите разложение в ряд Фурье функции $f(x) = x\cos x$ в интервале $(0; \pi)$ в неполные ряды Фурье, содержащие

а) только косинусы;

б) только синусы.

Ответ: а) $f(x) = -\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}\cos x - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2} \cos 2kx$;

б) $f(x) = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2-1} \sin kx$.

17. Пользуясь разложением, полученным в задании 16, найдите сумму ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2}$.

Ответ: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}$.

Заключение

Автор попытался в наиболее доступной форме изложить материал по одному из важнейших разделов курса математического анализа – теории рядов.

Пособие написано и построено таким образом, чтобы студенты математических факультетов могли самостоятельно изучать данный раздел математического анализа. Последовательность изложения теоретического и практического материала вполне логична, что должно способствовать его лучшему усвоению.

В каждой из шести глав пособия представлен теоретический материал и подобраны примеры, иллюстрирующие различные положения теории рядов. Приведены задания для самостоятельной работы с ответами.

Пособие может также оказаться полезным преподавателям математических факультетов.

Данное пособие ориентировано на студентов математических факультетов и особенно полезно (наряду с [3, 4]) при подготовке к экзамену по математическому анализу.

Рекомендуем при работе с материалом:

1) прочесть параграф; понять, о чём идет речь; разобраться с неясными моментами;

2) отметить для себя ключевые приёмы доказательств;

3) попытаться пересказать материал параграфа, подглядывая в отмеченные ключевые приёмы;

4) воспроизвести изученное и письменно, и устно без подглядывания;

5) внимательно прочитать теоретический материал; запомнить приведенные определения, теоремы и формулы; разобрать рассмотренные в тексте примеры и только после этого приступать к самостоятельному решению примеров и задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы математического анализа / Г.П. Акилов, В. Н. Дятлов; АН СССР СО, Ин-т математики. – Новосибирск: Наука, 1980. – 336 с.
2. Баранова О.Е., Суетин В.Ю. Краткий курс действительного и комплексного анализа. – Тверь, 2006. – 86 с.
3. Голубев А.А. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного действительного переменного: учебное пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2015. – 160 с.
4. Голубев А.А., Суетин В.Ю. Введение в анализ: Учеб. пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2007. – 160 с.
5. Голубев А.А., Граф С.Ю., Шеретов В.Г. Практический курс комплексного анализа: учеб. пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2003. – 96 с.
6. Гусев А.И. Математический анализ: Практический курс. Дифференцирование одномерных функций: учеб. пособие. – Тверь, 1988. – 96 с.
7. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 461 с.
8. Зорич В.А. Математический анализ: учебник. Ч. II. – М.: Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 640 с.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа (в двух частях). – М.: Физматлит, 2005. – 648 с.
10. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: в 2 т. – М., 1987. – 358 с.
11. Камынин Л.И. Курс математического анализа. Т. 1, 2-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 2001. – 432 с.
12. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. Т. 3. – М.: Высш. шк., 1988. – 352 с.
13. Никольский С.М. Курс математического анализа: в 2 т. – М., 1973. – 451 с.
14. Смирнов Г.А. Лекции по математическому анализу. – Тверь, 1987–1990 (рукопись).

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГОЛУБЕВ Александр Анатольевич

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие

Электронное издание

Усл. печ. л. 10,35. Заказ № 49.
Издательство Тверского государственного университета
Адрес: Россия, 170100, г. Тверь, Студенческий пер., д. 12, кор. Б.
Тел. (4822) 35-60-63.